

# Оператор Дирака с комплекснозначным суммируемым потенциалом.

Савчук А. М., Шкаликов А. А.<sup>1)</sup>

Московский Государственный Университет, Москва, Россия

Декабрь 2014<sup>2)</sup>

В работе изучается оператор Дирака, порожденный на отрезке  $[0, \pi]$  дифференциальным выражением  $-B\mathbf{y}' + Q(x)\mathbf{y}$ , где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_3(x) & q_4(x) \end{pmatrix},$$

а функции  $q_j(x)$  принадлежат пространству  $L_p[0, \pi]$  для некоторого  $p \geq 1$ . Класс регулярных и сильно регулярных операторов такого вида определяется соответствующими краевыми условиями. В работе получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций таких операторов с оценками остатков, зависящими от  $p$ . Доказано, что система собственных и присоединенных функций произвольного регулярного оператора образует базис Рисса со скобками в пространстве  $(L_2[0, \pi])^2$  и обычный базис Рисса, при условии сильной регулярности оператора.

Ключевые слова: *Оператор Дирака, регулярные краевые условия, асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций, базис Рисса.*

## ВВЕДЕНИЕ И ОБОЗНАЧЕНИЯ.

В работе изучается оператор  $L_Q$ , порожденный дифференциальным выражением

$$(1) \quad l_Q(\mathbf{y}) = -B\mathbf{y}' + Q\mathbf{y}$$

в пространстве  $\mathbb{H} = L_2[0, \pi] \oplus L_2[0, \pi] \ni \mathbf{y}$ , где

$$(2) \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} q_1(x) & q_2(x) \\ q_3(x) & q_4(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}.$$

Функции  $q_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$ , предполагаются суммируемыми на отрезке  $[0, \pi]$  и комплекснозначными. Естественно, для корректного определения этого оператора нужно дополнительно задать еще краевые условия, но об этом мы будем говорить ниже. В этой работе мы сформулируем и докажем результаты о свойствах оператора Дирака для случая  $q_j \in L_p[0, \pi]$  при некотором  $p \geq 1$ . Но одновременно мы подготовим базу для исследования этого оператора с потенциалами из других функциональных пространств, в частности для  $q_j$  из пространств Соболева  $W_p^\theta[0, \pi]$ ,  $\theta \geq 0$ ,  $p \geq 1$ . Конечно, при  $\theta > 0$  полученные здесь результаты об асимптотическом поведении собственных функций и собственных значений могут быть существенно уточнены.

Система (1) была введена в рассмотрение П.Дираком в 1929 году в связи с изучением релятивистской модели эволюции спин-1/2 частицы в электромагнитном поле. Сам Дирак рассматривал случай  $q_2 = q_3 = 0$ ,  $q_1 = V(x) - m$ ,  $q_4(x) = V(x) + m$ , где функция  $V(x)$  описывает потенциал поля, а  $m$  — масса частицы (см. [1]). Оператор  $L_Q$  изучался во многих работах, но до недавнего времени в основном в случае симметрической матрицы  $Q$  с непрерывными функциями  $q_j$  (см, например, монографию Левитана и Саргсяна

<sup>1)</sup>Первый автор поддержан грантом РФФИ, № 13-01-12476 ОФИ\_м2, второй — грантом РНФ № 14-11-00754.

<sup>2)</sup>Статья опубликована в Math. Notes **96** (5), 777–810 (2014).

[2] и ссылки в ней). Оператору  $L_Q$  с периодическими и антипериодическими условиями посвящена серия статей Дьякова и Митягина (см., например, работу [3] и литературу в ней). В работах [4]–[6] тех же авторов изучен оператор Дирака с потенциалом  $Q \in L_2$  и регулярными краевыми условиями. В частности, в случае  $Q \in L_2$  для сильно регулярных условий в работе [5] была доказана базисность Рисса и теорема об асимптотическом поведении собственных значений (она аналогична первой части Теоремы 4.3 этой работы). При отсутствии сильной регулярности была доказана базисность Рисса из подпространств. Для случая  $q_j \in L_1[0, \pi]$  отметим работу Альбеверио, Гринива и Микитюка [7], в которой методом операторов преобразования изучена обратная задача восстановления вещественнозначной матрицы  $Q$ ,  $q_2 = q_3 = 0$ , по двум спектрам оператора  $L_Q$  с краевыми условиями Дирихле  $u_1(0) = u_1(\pi) = 0$  и Дирихле–Неймана  $u_1(0) = u_2(\pi) = 0$ .

К системе Дирака применимы результаты, полученные для общих систем первого порядка с матрицей  $n \times n$ . Эти исследования берут свое начало с работ Биркгофа [8, 9], Тамаркина [10, 11], Биркгофа и Лангера [12]. В частности, в этих работах были введены понятия регулярных и сильно регулярных краевых условий, при которых оператор  $L_Q$  изучается в этой работе. Работы Данфорда [13], Михайлова [14] и Г. Кесельмана [15] были первыми, в которых было проведено изучение свойств базисности системы корневых векторов для сильно регулярных обыкновенных дифференциальных операторов. Обобщение этих результатов и их развитие было проведено в работах Шкаликова [16, 17]. Методы из [16] мы используем и в этой работе. Общие результаты о базисности для возмущений самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве были получены Маркусом [18] и Кацнельсоном [19], а позднее были обобщены Маркусом и Мацаевым [20] (см. также [21]). Агранович [22, 23] сделал важные добавления к этим теоремам. Новые идеи в этой теме для операторов частного вида были предложены Адуччи и Митягиным [24], а для общих операторов Шкаликовым [25]. Из последних работ об обыкновенных дифференциальных операторах, порождаемых матрицей  $n \times n$ , отметим работы Маламуда, Оридороди и Лунева [26, 27]. Для таких операторов в них доказаны теоремы о полноте, минимальности и базисности системы корневых векторов (для случая системы Дирака рассмотрен потенциал  $P \in L_\infty$  и анонсирован результат для  $P \in L_2$ ). Отметим также работы Амирова и Гусейнова [28], Баскакова, Дербушева и Щербакова [29], Корнева и Хромова [30], Трушина и Ямамото [31], в которых читатель может найти интересные результаты, связанные с оператором Дирака.

Основная цель настоящей работы — найти асимптотики собственных значений и собственных функций регулярного оператора  $L_Q$  при  $q_j \in L_p[0, \pi]$ ,  $p \geq 1$ , а также доказать базисность Рисса собственных функций (со скобками или без них) в пространстве  $\mathbb{H}$  при любом  $p \geq 1$ . Эти результаты были получены авторами еще в 2011 году (в частности, Теорема 4.9 была анонсирована в [32]). Однако, настоящая версия работы была записана только в августе 2013 года. Тогда же она была послана некоторым специалистам для ознакомления. В частности, мы искренне благодарим профессора Б. С. Митягина, сделавшего несколько ценных замечаний. Публикацию работы авторы откладывали, надеясь найти более простое доказательство технически сложной Леммы 2.3 (отметим, что эта лемма является ключевой в работе). Сделать это не удалось и авторы решили опубликовать исходную версию доказательства. Однако, при поиске более простого доказательства Леммы 2.3, авторам удалось найти другой подход к получению нужных асимптотик, который основан на других идеях и будет представлен в других работах. Недавно авторам стало известно о работе Лунева и Маламуда [33], в которой они анонсировали результат о базисности Рисса системы корневых векторов оператора Дирака, порожденного сильно регулярными краевыми условиями, с потенциалом  $Q \in L_1[0, \pi]$ . Идея доказательства в [33] отлична от нашей. Кроме того, мы доказываем более общий результат, не предполагая сильную регулярность, а только регулярность. Отметим также, что при доказательстве

асимптотических формул для собственных значений и собственных функций, нами получено существенно более точные оценки остатков, в то время как для доказательства базисности Рисса достаточно оценок вида  $o(1)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

На протяжении всей статьи мы будем использовать следующие обозначения. Через  $\mathbf{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))^t$  будем обозначать вектор-функции на  $[0, \pi]$ , через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{H}$ . Чтобы не усложнять запись мы часто будем писать  $\mathbf{f} \in L_p$ , предполагая, что  $\mathbf{f} \in L_p \times L_p$ , или  $Q \in L_p$ , предполагая, что все компоненты матрицы из  $L_p$ . Норму в  $L_p$  или в  $L_p \times L_p$  будем обозначать  $\|\cdot\|_p$ . Если из контекста ясно, в каком пространстве функций (векторных или скалярных) мы работаем, мы не делаем различия в обозначениях между  $L_p$  и  $L_p \times L_p$ .

## 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

С дифференциальным выражением  $l_Q$  свяжем максимальный оператор

$$L_{Q,M} \mathbf{y} := l_Q(\mathbf{y}); \quad \mathfrak{D}(L_{Q,M}) = \{\mathbf{y} \in AC[0, \pi] \mid l(\mathbf{y}) \in \mathbb{H}\}$$

и минимальный оператор  $L_{Q,m}$ , являющийся сужением максимального оператора на область

$$\mathfrak{D}(L_m) = \{\mathbf{y} \in \mathfrak{D}(L_M) \mid \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}(\pi) = 0\}.$$

Здесь  $AC[0, \pi] = W_1^1[0, \pi]$  — пространство абсолютно непрерывных функций, а элементы матрицы  $Q$  — произвольные суммируемые комплекснозначные функции. В этом случае оба слагаемых дифференциального выражения  $l_Q(\mathbf{y})$  корректно определены, как функции из  $L_1 \times L_1$ . Но в область определения входят только те функции  $\mathbf{y}$ , для которых сумма этих слагаемых принадлежит  $\mathbb{H}$ . Через  $L_{\bar{Q},M}$  и  $L_{\bar{Q},m}$  будем обозначать максимальный и минимальный операторы, порожденные сопряженным дифференциальным выражением

$$l_{\bar{Q}}(\mathbf{y}) := -B\mathbf{y}' + \bar{Q}\mathbf{y}, \quad \text{где } \bar{Q} = \begin{pmatrix} \bar{q}_1 & \bar{q}_3 \\ \bar{q}_2 & \bar{q}_4 \end{pmatrix}.$$

**Лемма 1.1.** Пусть  $\varphi$  — произвольная абсолютно непрерывная на  $[0, \pi]$  функция. Тогда оператор  $L_Q$  унитарно эквивалентен оператору  $L_{\tilde{Q}}$ , где

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} \tilde{q}_1 & \tilde{q}_2 \\ \tilde{q}_3 & \tilde{q}_4 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{q}_1 = -\dot{\varphi} + q_1 \cos^2 \varphi - (q_2 + q_3) \sin \varphi \cos \varphi + q_4 \sin^2 \varphi,$$

$$\tilde{q}_2 = q_2 \cos^2 \varphi + (q_1 - q_4) \sin \varphi \cos \varphi - q_3 \sin^2 \varphi,$$

$$\tilde{q}_3 = q_3 \cos^2 \varphi + (q_1 - q_4) \sin \varphi \cos \varphi - q_2 \sin^2 \varphi,$$

$$\tilde{q}_4 = -\dot{\varphi} + q_4 \cos^2 \varphi + (q_2 + q_3) \sin \varphi \cos \varphi + q_1 \sin^2 \varphi.$$

*Доказательство.* Это утверждение хорошо известно; см. [2, Гл. 1]. Рассмотрим в пространстве  $\mathbb{H}$  унитарные операторы

$$H = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad H^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$H^{-1}L_Q H = -H^{-1}BH \frac{d}{dx} + (H^{-1}QH - H^{-1}B\dot{H}) = -B \frac{d}{dx} + (H^{-1}QH - \dot{\varphi}I),$$

где  $I$  — тождественный оператор в  $\mathbb{H}$ . Непосредственным подсчетом получаем отсюда утверждение леммы.  $\square$

**Замечание 1.2.** Заметим теперь, что  $\tilde{q}_1 + \tilde{q}_4 = -2\dot{\varphi} + q_1 + q_4$ , так что выбрав

$$\varphi = \frac{1}{2} \int_0^x (q_1 + q_4) d\xi,$$

получим равенство  $\tilde{q}_4 = -\tilde{q}_1$ . Далее, важно заметить, что при таком выборе  $\varphi$  класс гладкости потенциала  $\tilde{Q}$  совпадает с классом потенциала  $Q$ , например  $Q \in W_p^\theta$  тогда и только тогда, когда  $\tilde{Q} \in W_p^\theta$ . Наконец, заметим (это важно для описания самосопряженных расширений оператора  $L_{Q,m}$ ), что при отображении  $\mathbf{y} \mapsto H\mathbf{y} = \mathbf{z}$  пространства  $\mathbf{y} \in AC[0, \pi]$  выполнено:

$$\mathbf{z}(0) = \mathbf{y}(0), \quad \mathbf{z}(\pi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi(\pi) & \sin \varphi(\pi) \\ -\sin \varphi(\pi) & \cos \varphi(\pi) \end{pmatrix} \mathbf{y}(\pi).$$

Поэтому, сделав, если необходимо, замену спектрального параметра  $\tilde{\lambda} = \lambda + c$  мы всегда можем считать, что

$$\varphi(\pi) = \frac{1}{2} \int_0^\pi (q_1 + q_4) d\xi = 0,$$

т.е. что после замены  $\mathbf{z} = H\mathbf{y}$  выполняется равенство  $\mathbf{z}(\pi) = \mathbf{y}(\pi)$ .

Всюду далее в работе мы считаем, что функции  $q_j$  удовлетворяют следующим условиям

- (i) Функции  $q_2$  и  $q_3$  суммируемы на  $[0, \pi]$ ;
- (ii) Функции  $q_1$  и  $q_2 + q_3$  принадлежат шару  $B(0, R)$  пространства  $L_p[0, \pi]$  для некоторого  $p \geq 1$  и  $R > 0$ .
- (iii)  $q_4 = -q_1$  (как было отмечено выше, это условие не ограничивает общности).

**Лемма 1.3** (Формула Лагранжа). Для функций  $\mathbf{f} \in \mathfrak{D}(L_{Q,M})$ ,  $\mathbf{g} \in \mathfrak{D}(L_{\overline{Q},M})$  справедливо тождество

$$\int_0^\pi L_{Q,M}(\mathbf{f}) \overline{\mathbf{g}} dx = \int_0^\pi \mathbf{f} \overline{L_{\overline{Q},M}(\mathbf{g})} dx + [\mathbf{f}, \mathbf{g}]_0^\pi,$$

где  $[\mathbf{f}, \mathbf{g}]_0^\pi = -f_2(x)\overline{g_1(x)} \Big|_0^\pi - \overline{g_2(x)}f_1(x) \Big|_0^\pi$ .

Из этой формулы, в частности, получаем

$$\langle L_{Q,M}(\mathbf{f}), \mathbf{g} \rangle = \langle \mathbf{f}, L_{\overline{Q},m}(\mathbf{g}) \rangle, \quad \mathbf{f} \in \mathfrak{D}(L_{Q,M}), \quad \mathbf{g} \in \mathfrak{D}(L_{\overline{Q},m}),$$

т.е. операторы  $L_{Q,M}$  и  $L_{\overline{Q},m}$  взаимно сопряжены.

В дальнейшем важную роль играет следующий результат.

**Теорема 1.4.** Пусть  $\mathbf{A}(x)$  — матрица размера  $n \times n$ , элементы которой являются функциями пространства  $L_1[0, \pi]$ , а  $\mathbf{f} \in [L_1[0, \pi]]^n$  — вектор-функция. Тогда при любом  $c \in [0, \pi]$  уравнение

$$\mathbf{y}' = \mathbf{A}(x)\mathbf{y} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{y}(c) = \xi \in \mathbb{C}^n,$$

имеет единственное решение  $\mathbf{y}(x)$ , причем  $\mathbf{y}(x)$  — абсолютно непрерывная на  $[0, \pi]$  вектор-функция. Если последовательность матриц  $\mathbf{A}_\varepsilon(x)$  с элементами из  $L_1[0, \pi]$  такова, что  $\|\mathbf{A}_\varepsilon(x) - \mathbf{A}(x)\|_{L_1} \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , то решения уравнений

$$\mathbf{y}'_\varepsilon = \mathbf{A}_\varepsilon(x)\mathbf{y}_\varepsilon + \mathbf{f}, \quad \mathbf{y}_\varepsilon(c) = \xi,$$

сходятся к  $\mathbf{y}(x)$  равномерно на  $[0, \pi]$  (и даже в метрике пространства  $W_1^1[0, \pi]$ ). Кроме того, справедлива оценка

$$\|\mathbf{y}(x) - \mathbf{y}_\varepsilon(x)\|_{1,1} \leq C(\|\mathbf{f}\|_{L_1} + \|\xi\|)\|\mathbf{A}(x) - \mathbf{A}_\varepsilon(x)\|_{L_1}$$

с постоянной  $C$ , не зависящей от  $\mathbf{f}$  и  $\varepsilon$ .

*Доказательство.* Первое утверждение теоремы хорошо известно (см., например, [35, Гл. 8]). Доказательство второго утверждения содержится в работе [34].  $\square$

Напомним, что оператор  $F$ , действующий в гильбертовом (или банаховом) пространстве  $\mathfrak{H}$ , называется фредгольмовым, если его область определения  $\mathfrak{D}(F)$  плотна в  $\mathfrak{H}$ , образ замкнут, а дефектные числа  $\{\alpha, \beta\}$ , равные размерностям ядра и коядра, конечны.

**Теорема 1.5.** *При любом  $\lambda \in \mathbb{C}$  операторы  $L_{Q,M} - \lambda$  и  $L_{\bar{Q},m} - \bar{\lambda}$  фредгольмовы, являются взаимно сопряженными, а их дефектные числа равны  $\{0, 2\}$  и  $\{2, 0\}$ , соответственно.*

*Доказательство.* Доказательство этой теоремы легко получается с помощью предыдущей теоремы точно также, как это сделано в работе [34].  $\square$

Перейдем к описанию расширений оператора  $L_{Q,m}$ . Нас интересуют операторы  $L_Q$  с нулевыми дефектными числами, которые являются одновременно нетривиальным расширением оператора  $L_m$  и нетривиальным сужением оператора  $L_M$ , т.е.  $L_m \subset L \subset L_M$ . Из Теоремы 1.5 и из определений максимального и минимального операторов следует, что любой такой оператор  $L$  имеет область определения

$$(3) \quad \mathfrak{D}(L) = \{\mathbf{y} \mid \mathbf{y} \in \mathfrak{D}(L_M), U(\mathbf{y}) = 0\},$$

где  $U(\mathbf{y})$  — некоторая ненулевая линейная форма от переменных  $\mathbf{y}(0)$  и  $\mathbf{y}(\pi)$ . Ясно, что любая такая форма может быть записана в виде

$$(4) \quad U(\mathbf{y}(0), \mathbf{y}(\pi)) = A\mathbf{y}(0) + B\mathbf{y}(\pi), \text{ где } A = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $J_{\alpha\beta}$  определитель, составленный из  $\alpha$ -го и  $\beta$ -го столбца матрицы

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}.$$

линейной формы  $U$ , введенной в (4) Краевое условие, определенное формой  $U$  назовем *регулярным*, если не равны нулю два числа

$$(5) \quad J_{14} + J_{32} + i(J_{42} - J_{13}) \quad \text{и} \quad J_{14} + J_{32} - i(J_{42} - J_{13}).$$

Конечно, если все коэффициенты  $u_{kj}$ , участвующие в линейной форме  $U$ , вещественны, то достаточно отличия от нуля только одного из этих чисел. Оператор Дирака, порожденный регулярным краевым условием  $U$  (т.е. оператор  $L_Q$  с областью (3)) будем называть *регулярным*. Позже мы выделим также *сильно регулярные* операторы Дирака. Здесь только отметим, что давать определение сильно регулярного краевого условия корректно только при дополнительном условии  $q_2 = q_3$ . В противном случае, при одном и том же краевом условии оператор Дирака с потенциалом  $Q$  может быть сильно регулярным, а с другим потенциалом  $Q_1$  таким свойством не обладать.

Краевые условия назовем *невырожденными*, если из трех чисел  $J_{12} + J_{34}$  и  $J_{14} + J_{32} \pm i(J_{42} - J_{13})$  хотя бы два числа отличны от нуля. Ясно, что в случае вещественных коэффициентов  $u_{kj}$  понятие регулярности и невырожденности совпадают. Мы выясним, что оператор  $L_Q$  с областью (3), порожденный невырожденным краевым условием имеет дискретный спектр, но полное изучение мы будем проводить только для регулярных операторов.

## 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $l_Q(y) = \lambda y$ .

Здесь мы получим результаты об асимптотическом поведении фундаментальной системы решений системы  $L_Q \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}$ , которые существенно будут использоваться далее.

Обозначим через  $s(x, \lambda)$  решение с начальными условиями  $s_1(0, \lambda) = 0$ ,  $s_2(0, \lambda) = 1$  и через  $c(x, \lambda)$  — решение с начальными условиями  $c_1(0, \lambda) = 1$ ,  $c_2(0, \lambda) = 0$ . Доказательство асимптотических формул для этих решений потребует серьезной технической работы. Далее мы будем проводить оценки в комплексной  $\lambda$ -плоскости внутри полос

$$\Pi_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} \lambda| < \alpha\}.$$

Для оценки остатков мы введем функции

$$\begin{aligned} v_1(x, \lambda) &= \int_0^x q_1(t) \sin(2\lambda t) dt, & v_2(x, \lambda) &= \int_0^x q_1(t) \cos(2\lambda t) dt, \\ v_3(x, \lambda) &= \frac{1}{2} \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \sin(2\lambda t) dt, & v_4(x, \lambda) &= \frac{1}{2} \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \cos(2\lambda t) dt. \end{aligned}$$

Норму функции  $v_j(x, \lambda)$  при фиксированном  $\lambda$  по переменной  $x$  в пространстве  $L_\nu[0, \pi]$  обозначим  $v_{j,\nu}(\lambda)$ . Индексы  $p$  и  $p'$  везде далее будем считать фиксированными:  $p$  определяется условием (ii), а  $p'$  является сопряженным индексом к  $p$ , т.е.  $1/p' + 1/p = 1$ , причем  $p' = \infty$  при  $p = 1$ . Обозначим также

$$(6) \quad \Upsilon(x, \lambda) = \sum_{j=1}^4 |v_j(x, \lambda)|, \quad \Upsilon_\nu(\lambda) = \sum_{j=1}^4 v_{j,\nu}(\lambda).$$

При этом индекс функции  $\Upsilon_\infty(\lambda)$  для краткости будем опускать, обозначая ее  $\Upsilon(\lambda)$ . Заметим сразу, что

$$\Upsilon_\nu(\lambda) \leq \pi^{1/\nu} \Upsilon(\lambda) \quad \text{и} \quad \sup_{x \in [0, \pi]} |\Upsilon(x, \lambda)| \leq \Upsilon(\lambda).$$

Мы выбрали именно такие функции для оценки остаточных членов, поскольку явный вид этих функций позволит нам в дальнейшем получать асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций операторов Дирака в зависимости от принадлежности потенциала  $Q$  к тому или иному классу функций. Легко видеть (это сразу же следует из леммы Римана–Лебега), что при каждом фиксированном  $x \in [0, \pi]$  функция  $\Upsilon(x, \lambda)$  стремится к нулю при  $\lambda \rightarrow \pm\infty$ . Докажем, что это стремление к нулю равномерно по  $x \in [0, \pi]$ . В дальнейших оценках будем использовать следующие очевидные неравенства. Пусть произвольные точки  $z$ ,  $z_1$  и  $z_2$  лежат внутри круга  $|z| < \xi \leq 1$ , а точка  $w$  лежит внутри полосы  $\Pi_\alpha$  в комплексной плоскости. Тогда

$$(7) \quad \begin{aligned} |\sin w| &\leq \operatorname{ch} \alpha, & |\cos w| &\leq \operatorname{ch} \alpha, & |\sin z| &\leq |z| \operatorname{ch} \xi, \\ |\cos z - 1| &\leq \frac{1}{2} |z|^2 \operatorname{ch} \xi, & |\sin z - z| &\leq \frac{1}{6} |z|^2 \operatorname{ch} \xi, \\ |\cos z_2 - \cos z_1| &\leq |z_2 - z_1| \operatorname{ch} \xi, & |(\sin z_2 - z_2) - (\sin z_1 - z_1)| &\leq \frac{1}{2} |z_2 - z_1| \xi^2 \operatorname{ch} \xi, \\ |\exp(z) - 1| &\leq |z| \exp(\xi), & |\exp(z) - 1 - z| &\leq \frac{1}{2} |z|^2 \exp(\xi). \end{aligned}$$

**Лемма 2.1.** Пусть  $Q \in L_1[0, \pi]$  и выполнены условия (i), (ii), (iii), выписанные выше. Пусть  $\alpha > 0$  — произвольное фиксированное число,  $\Pi_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} \lambda| < \alpha\}$ . Тогда  $\Upsilon(\lambda) \rightarrow 0$  при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  равномерно в полосе  $\Pi_\alpha$ .

*Доказательство.* Ясно, что доказательство достаточно провести отдельно для каждой из функций  $v_j$ . Мы рассмотрим только функцию  $v_1$  — остальные слагаемые оцениваются аналогично. Подберем непрерывно дифференцируемую функцию  $p_1(x)$  так, что

$$\|q_1 - p_1\|_{L_1[0, \pi]} < \varepsilon / (2 \operatorname{ch}(2\pi\alpha)).$$

Тогда

$$\left| \int_0^x (q_1(t) - p_1(t)) \sin(2\lambda t) dt \right| \leq \text{ch}(2\pi\alpha) \|q_1 - p_1\|_{L_1[0,\pi]} < \varepsilon/2.$$

Далее, при  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\lambda \in \Pi_\alpha$ ,

$$\int_0^x p_1(t) \sin(2\lambda t) dt = \frac{p_1(0) - p_1(x) \cos(2\lambda x)}{2\lambda} + \frac{1}{2\lambda} \int_0^x p_1'(t) \cos(2\lambda t) dt = O\left(\frac{1}{\lambda}\right),$$

где оценки выполнены равномерно по  $x \in [0, \pi]$ . Но тогда  $|v_1(x, \lambda)| < \varepsilon$  при  $\lambda \in \Pi_\alpha$ ,  $|\lambda| > \mu$ , при достаточно большом  $\mu$ .  $\square$

Отметим также важную для дальнейшего оценку

**Лемма 2.2.**

$$(8) \quad \sup_{x \in [0, \pi]} |\Upsilon(x, \lambda)|^2 \leq 8R \text{ch}(2\pi\alpha) \Upsilon_\nu(\lambda).$$

*Доказательство.* Функция  $\Upsilon(x, \lambda)^2$  состоит из суммы шестнадцати попарных произведений вида  $v_k(x, \lambda)v_j(x, \lambda)$ ,  $k, j = 1, 2, 3, 4$ . Поэтому достаточно оценить одно такое слагаемое. Применив неравенство Гельдера, получим

$$|v_k(x, \lambda)v_j(x, \lambda)| = \left| \int_0^x (v_k'(t, \lambda)v_j(t, \lambda) + v_k(t, \lambda)v_j'(t, \lambda)) dt \right| \leq R \text{ch}(2\pi\alpha) (v_{j,\nu}(\lambda) + v_{k,\nu}(\lambda)).$$

Складывая эти неравенства и учитывая, что сама функция  $\Upsilon_\nu(\lambda)$  состоит из четырех слагаемых, получаем оценку (8).  $\square$

Мы начнем с асимптотики функции  $\mathbf{s}(x, \lambda)$ . В системе  $l_Q \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}$  сделаем замену Прюфера (см. [36])

$$(9) \quad y_1(x, \lambda) = -r(x, \lambda) \sin \theta(x, \lambda), \quad y_2(x, \lambda) = r(x, \lambda) \cos \theta(x, \lambda)$$

(ее можно трактовать как переход к полярным координатам). Тогда систему можно записать в виде

$$(10) \quad \begin{aligned} r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta - q_1 r \sin \theta + q_2 r \cos \theta &= -\lambda r \sin \theta, \\ r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta - q_3 r \sin \theta - q_1 r \cos \theta &= \lambda r \cos \theta, \end{aligned}$$

где  $r = r(x, \lambda)$ ,  $\theta = \theta(x, \lambda)$ ,  $q_j = q_j(x)$ ,  $j = 1, 2, 3$ , а производные функций  $r$  и  $\theta$  берутся по переменной  $x$ . Умножим первое уравнение в (10) на  $-\sin \theta$  и прибавим второе уравнение, умноженное на  $\cos \theta$ . В результате получим уравнение для функции  $\theta(x, \lambda)$

$$(11) \quad \theta'(x, \lambda) - q_1(x) \cos 2\theta(x, \lambda) - \frac{1}{2}(q_2(x) + q_3(x)) \sin 2\theta(x, \lambda) = \lambda.$$

Начальное условие полагаем  $\theta(0, \lambda) = 0$ , так как  $s_1(0, \lambda) = 0$ . Если мы умножим первое уравнение в (10) на  $\cos \theta$  и прибавим второе уравнение, умноженное на  $\sin \theta$ , то получим уравнение на функцию  $r(x, \lambda)$

$$(12) \quad r'(x, \lambda) = r(x, \lambda) \left[ \frac{1}{2}(q_3(x) - q_2(x)) + q_1(x) \sin 2\theta(x, \lambda) - \frac{1}{2}(q_2(x) + q_3(x)) \cos 2\theta(x, \lambda) \right]$$

с начальным условием  $r(0, \lambda) = 1$ . Таким образом от системы  $l_Q(y) = \lambda y$  мы перешли к системе двух уравнений (11), (12). Эти уравнения не являются линейными. Но достоинство новой системы состоит в том, что уравнение (11) не содержит неизвестной функции  $r(x, \lambda)$  и является независимым дифференциальным уравнением на функцию  $\theta(x, \lambda)$ . Наша ближайшая цель — найти асимптотические представления для функций  $\theta(x, \lambda)$  и  $r(x, \lambda)$ .

Эти формулы будут получены в нижеследующих леммах. Первая из этих лемм является ключевой. На ней базируются основные результаты работы. Далее без напоминаний используем введенные выше обозначения.

**Лемма 2.3.** Пусть  $Q \in L_1[0, \pi]$  и выполнены условия (i), (ii), (iii), выписанные выше. Пусть  $\alpha > 0$  — произвольное фиксированное число,  $\Pi_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} \lambda| < \alpha\}$ . Тогда при любом  $\lambda$  из области

$$D_{Q,\alpha} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| < \alpha, \Upsilon(\lambda) < \frac{1}{8k^4} \right\}, \quad \text{где } k = 2 + 12R \operatorname{ch}(2\pi\alpha + 1),$$

уравнение (11) имеет единственное решение  $\theta(x, \lambda)$ , определенное при всех  $0 \leq x \leq \pi$  и удовлетворяющее начальному условию  $\theta(0, \lambda) = 0$ . Это решение допускает представление

$$(13) \quad \theta(x, \lambda) = \lambda x + \eta(x, \lambda),$$

где

$$|\eta(x, \lambda)| \leq \Upsilon(x, \lambda) + k^2 \Upsilon_{p'}(\lambda) \quad \text{и} \quad \|\eta(x, \lambda)\|_{p'} \leq (1 + \pi k^2) \Upsilon_{p'}(\lambda).$$

Более того,

$$(14) \quad \eta(x, \lambda) = \int_0^x q_1(t) \cos(2\lambda t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \sin(2\lambda t) dt + \zeta(x, \lambda),$$

где

$$\|\zeta(x, \lambda)\|_C \leq k^2 \Upsilon_{p'}(\lambda).$$

При этом

$$(15) \quad |\eta'(x, \lambda)| \leq \operatorname{ch}(2\pi\alpha + 1) \left( |q_1(x)| + \frac{1}{2} |q_2(x) + q_3(x)| \right)$$

почти всюду на  $x \in [0, \pi]$ .

*Доказательство. Шаг 1.* Прежде всего заметим, что область  $\Pi_\alpha \setminus D_{Q,\alpha}$  ограничена, т.е. существует число  $\mu = \mu(Q, \alpha)$ , такое что все числа  $\lambda \in \Pi_\alpha$  лежат в  $D_{Q,\alpha}$ , если только  $|\operatorname{Re} \lambda| \geq \mu$ . Это утверждение вытекает из Леммы 2.1.

Перепишем уравнение (11) в интегральном виде

$$\theta(x, \lambda) = \lambda x + \int_0^x q_1(t) \cos 2\theta(t, \lambda) dt + \frac{1}{2} \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \sin 2\theta(t, \lambda) dt.$$

и сделаем замену  $\eta(x, \lambda) = \theta(x, \lambda) - \lambda x$ . Тогда уравнение примет вид

$$(16) \quad \eta(x, \lambda) = \int_0^x q_1(t) \cos(2\eta(t, \lambda) + 2\lambda t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \sin(2\eta(t, \lambda) + 2\lambda t) dt.$$

Правую часть этого уравнения мы обозначим через  $F_{Q,\lambda}(\eta)$ , где  $F_{Q,\lambda}$  — нелинейное отображение пространства  $C[0, \pi]$  в себя,

$$F_{Q,\lambda}(\eta) = \int_0^x q_1(t) \cos(2\eta(t, \lambda) + 2\lambda t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \sin(2\eta(t, \lambda) + 2\lambda t) dt.$$

Напомним формулировку принципа сжимающих отображений, которым мы намереваемся воспользоваться. Пусть отображение  $\Phi$  переводит замкнутый шар  $B(y, r)$  банахова пространства  $X$  в себя и для некоторого  $q \in [0, 1)$  и  $\forall y_1, y_2 \in B(y, r)$  выполнено  $\|\Phi(y_2) - \Phi(y_1)\| \leq q \|y_2 - y_1\|$ . Тогда в шаре  $B(y, r)$  существует единственная неподвижная



точка  $x$  (т.е.  $\Phi(x) = x$ ). При этом  $x = \lim x_n$ , где  $x_0 \in B(y, r)$  — произвольно, а  $x_n = \Phi(x_{n-1})$  для всех  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

В качестве центра шара  $B(y, r)$  положим

$$f_0 = \int_0^x q_1(t) \cos(2\lambda t) dt + \frac{1}{2} \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \sin(2\lambda t) dt,$$

а радиус выберем равным

$$r = k^2 \Upsilon_{p'}(\lambda) \leq k^2 \pi \Upsilon(\lambda) < \pi / (8k^2) < 1/10.$$

*Шаг 2.* Оценим разность  $\|F(f_0) - f_0\|_{C[0, \pi]}$ .

Представим отображение  $F$  следующим образом:

$$F(\eta) = f_0 + F_1\eta + \mathcal{F}(\eta), \quad \text{где}$$

$$F_1\eta = -2 \int_0^x q_1(t) \sin(2\lambda t) \eta(t, \lambda) dt + \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \cos(2\lambda t) \eta(t, \lambda) dt,$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\eta) = & \int_0^x q_1(t) [\cos(2\eta(t, \lambda) + 2\lambda t) - \cos(2\lambda t) + 2 \sin(2\lambda t) \eta(t, \lambda)] dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) [\sin(2\eta(t, \lambda) + 2\lambda t) - \sin(2\lambda t) - 2 \cos(2\lambda t) \eta(t, \lambda)] dt. \end{aligned}$$

Тогда  $F(f_0) = f_0 + F_1(f_0) + \mathcal{F}(f_0)$ . Вначале отметим, что

$$(17) \quad |f_0(x)| \leq \Upsilon(x, \lambda), \quad \|f_0\|_{p'} \leq \Upsilon_{p'}(\lambda), \quad \|f_0\|_C \leq \Upsilon(\lambda) < \frac{1}{8k^4} < \frac{1}{128}.$$

Оценим теперь норму вектора

$$\begin{aligned} F_1(f_0) = & -2 \int_0^x q_1(t) \sin(2\lambda t) \int_0^t q_1(s) \cos(2\lambda s) ds dt - \\ & - \int_0^x q_1(t) \sin(2\lambda t) \int_0^t (q_2(s) + q_3(s)) \sin(2\lambda s) ds dt + \\ & + \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \cos(2\lambda t) \int_0^t q_1(s) \cos(2\lambda s) ds dt + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \cos(2\lambda t) \int_0^t (q_2(s) + q_3(s)) \sin(2\lambda s) ds dt. \end{aligned}$$

Проведем оценку только первого из четырех повторных интегралов — остальные три оцениваются аналогично

$$\left| \int_0^x q_1(t) \sin(2\lambda t) \int_0^t q_1(s) \cos(2\lambda s) ds dt \right| \leq \|q_1(t) \sin(2\lambda t)\|_{p'} \cdot v_{2,p'}(\lambda) \leq R \operatorname{ch}(2\pi\alpha) \cdot v_{2,p'}(\lambda),$$

где функция  $v_{2,p'}$  определена в начале параграфа. В результате получим оценку

$$\|F_1(f_0)\|_C \leq 2R \operatorname{ch}(2\pi\alpha) \Upsilon_{p'}(\lambda).$$

Перейдем к оценке нормы вектора  $\mathcal{F}(f_0)$ . Прежде всего, заметим, что при условии  $|f_0(t)| < 1/128$  из неравенств (7) и тригонометрических формул следует

$$(18) \quad \begin{aligned} & |\cos(2f_0(t) + 2\lambda t) - \cos(2\lambda t) + 2\sin(2\lambda t)f_0(t)| \leq \\ & \leq \frac{8}{3} \operatorname{ch}(2\pi\alpha) \left( \operatorname{ch} \frac{1}{64} \right) |f_0(t)|^2 \leq \frac{\operatorname{ch}(2\pi\alpha)}{2} |f_0(t)|, \\ & |\sin(2f_0(t) + 2\lambda t) - \sin(2\lambda t) - 2\cos(2\lambda t)f_0(t)| \leq \frac{\operatorname{ch}(2\pi\alpha)}{2} |f_0(t)|. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает оценка

$$\|\mathcal{F}(f_0)\|_C \leq \left( \|q_1\|_p + \frac{1}{2} \|q_2 + q_3\|_p \right) \frac{1}{2} \operatorname{ch}(2\pi\alpha) \|f_0\|_{p'} \leq R \operatorname{ch}(2\pi\alpha) \Upsilon_{p'}(\lambda).$$

Итак, мы показали, что

$$(19) \quad \|F(f_0) - f_0\|_C \leq 3R \operatorname{ch}(2\pi\alpha) \Upsilon_{p'}(\lambda) < \frac{k}{4} \Upsilon_{p'}(\lambda).$$

Шаг 2 завершен.

*Шаг 3.* Нам не удалось доказать, что отображение  $F$  сжимает. Дальнейшая идея доказательства состоит в следующем: мы покажем, что отображение  $\Phi$ , определенное в (23) уже является сжимающим. Для этого мы разложим отображение  $F$  в точке  $f_0$ :

$$(20) \quad \begin{aligned} F(\eta) &= F(f_0) + G_1(\zeta) + \mathcal{G}(\zeta), \quad \text{где } \zeta = \eta - f_0, \\ G_1(\zeta) &= -2 \int_0^x q_1(t) \sin(2\lambda t + 2f_0(t)) \zeta(t) dt + \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \cos(2\lambda t + 2f_0(t)) \zeta(t) dt, \\ \mathcal{G}(\zeta) &= \int_0^x q_1(t) [\cos(2\zeta(t) + 2\lambda t + 2f_0(t)) - \cos(2\lambda t + 2f_0(t)) + 2\sin(2\lambda t + 2f_0(t)) \zeta(t)] dt + \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) [\sin(2\zeta(t) + 2\lambda t + 2f_0(t)) - \sin(2\lambda t + 2f_0(t)) - 2\cos(2\lambda t + 2f_0(t)) \zeta(t)] dt. \end{aligned}$$

Оценим нормы отображений  $G_1$ ,  $G_1^2$  и  $\mathcal{G}$ . Легко видеть, что при условии  $\|f_0\|_C \leq 1/2$ , которое выполнено в  $D_{Q,\alpha}$  в силу оценки (17), имеем

$$\|G_1\|_C \leq 3\pi R \operatorname{ch}(2\pi\alpha + 1).$$

Конечно, норма  $G_1^2$  оценивается квадратом правой части этого неравенства, но нам требуется более точная оценка. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} G_1^2 \zeta &= 4 \int_0^x q_1(t) \sin(2\lambda t + 2f_0(t)) \int_0^t q_1(s) \sin(2\lambda s + 2f_0(s)) \zeta(s) ds dt - \\ &- 2 \int_0^x q_1(t) \sin(2\lambda t + 2f_0(t)) \int_0^t (q_2(s) + q_3(s)) \cos(2\lambda s + 2f_0(s)) \zeta(s) ds dt - \\ &- 2 \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \cos(2\lambda t + 2f_0(t)) \int_0^t q_1(s) \sin(2\lambda s + 2f_0(s)) \zeta(s) ds dt + \\ &+ \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \cos(2\lambda t + 2f_0(t)) \int_0^t (q_2(s) + q_3(s)) \cos(2\lambda s + 2f_0(s)) \zeta(s) ds dt. \end{aligned}$$

Для определенности оценим первый интеграл (остальные оцениваются аналогично)

$$\begin{aligned}
 (21) \quad & \left| \int_0^x q_1(t) \sin(2\lambda t + 2f_0(t)) \int_0^t q_1(s) \sin(2\lambda s + 2f_0(s)) \zeta(s) ds dt \right| = \\
 & = \left| \int_0^x q_1(s) \sin(2\lambda s + 2f_0(s)) \zeta(s) \int_s^x q_1(t) \sin(2\lambda t + 2f_0(t)) dt ds \right| \leq \\
 & \|\zeta\|_C R \operatorname{ch}(2\pi\alpha + 1) \left( \left\| \int_s^x q_1(t) \cos(2f_0(t)) \sin(2\lambda t) dt \right\|_{p'} + \left\| \int_s^x q_1(t) \sin(2f_0(t)) \cos(2\lambda t) dt \right\|_{p'} \right).
 \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части последнего неравенства представим в виде

$$\int_s^x q_1(t) \sin(2\lambda t) dt + \int_s^x q_1(t) (\cos(2f_0(t)) - 1) \sin(2\lambda t) dt.$$

Тогда  $\|\cdot\|_{p'}$  норма первого слагаемого не превосходит  $2v_{1,p'}(\lambda)$ , а модуль второго интеграла (см. (7)) не превосходит

$$2R \operatorname{ch}(2\pi\alpha) \operatorname{ch}(1/64) \|f_0\|_{p'}^2 \leq (1/32) R \operatorname{ch}(2\pi\alpha) \Upsilon_{p'}(\lambda).$$

Второй интеграл в правой части (21) аналогично разбивается в сумму

$$2 \int_s^x q_1(t) \cos(2\lambda t) f_0(t) dt + \int_s^x q_1(t) (\sin(2f_0(t)) - 2f_0(t)) \cos(2\lambda t) dt$$

и его  $\|\cdot\|_{p'}$  норма не превосходит

$$2R \operatorname{ch}(2\pi\alpha) \Upsilon_{p'}(\lambda) + \frac{1}{128} R \operatorname{ch}(2\pi\alpha) \Upsilon_{p'}(\lambda).$$

Сводя вместе все эти оценки получим

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_0^x q_1(t) \sin(2\lambda t + 2f_0(t)) \int_0^t q_1(s) \sin(2\lambda s + 2f_0(s)) \zeta(s) ds dt \right| \leq \\
 & \leq \|\zeta\|_C R \operatorname{ch}(2\pi\alpha + 1) (2v_{1,p'}(\lambda) + 3R \operatorname{ch}(2\pi\alpha) \Upsilon_{p'}(\lambda)).
 \end{aligned}$$

Отсюда следует оценка

$$\|G_1^2\|_C \leq R \operatorname{ch}(2\pi\alpha + 1) (12 + 27R \operatorname{ch}(2\pi\alpha)) \Upsilon_{p'}(\lambda) < (k^2/2) \Upsilon_{p'}(\lambda).$$

Перейдем к оценкам отображения  $\mathcal{G}$ . Аналогично неравенствам (18), в шаре  $\|\zeta\|_C \leq r$  оценим

$$\begin{aligned}
 & |\cos(2\zeta(t) + 2\lambda t + 2f_0(t)) - \cos(2\lambda t + 2f_0(t)) + 2\sin(2\lambda t + 2f_0(t))\zeta(t)| \text{ и} \\
 & |\sin(2\zeta(t) + 2\lambda t + 2f_0(t)) - \sin(2\lambda t + 2f_0(t)) - 2\cos(2\lambda t + 2f_0(t))\zeta(t)|
 \end{aligned}$$

величиной  $(8/3) \operatorname{ch}(2\pi\alpha + 1) \operatorname{ch}(2r) |\zeta(t)|^2$ . Тогда

$$\|\mathcal{G}(\zeta)\|_C \leq \frac{16\pi}{3} R \operatorname{ch}(2\pi\alpha + 1) \operatorname{ch}(2r) \|\zeta\|_C^2.$$

Поскольку  $r < 1/10$ , то число  $16\pi \operatorname{ch}(2r)/3$  не превосходит 18 и тогда

$$(22) \quad \|\mathcal{G}(\zeta)\|_C \leq \frac{3k}{2} \|\zeta\|_C^2.$$

Нам потребуется также оценка нормы разности  $\|\mathcal{G}(\zeta_1) - \mathcal{G}(\zeta_2)\|_C$ . Вновь обратимся к неравенствам (7):

$$\begin{aligned} & |\cos(2\zeta_1(t) + 2\lambda t + 2f_0(t)) - \cos(2\zeta_2 + 2\lambda t + 2f_0(t)) + 2\sin(2\lambda t + 2f_0(t))(\zeta_1(t) - \zeta_2(t))| \leq \\ & \leq |\cos(2\lambda t + 2f_0(t))| |\cos(2\zeta_1(t)) - \cos(2\zeta_2(t))| + \\ & + |\sin(2\lambda t + 2f_0(t))| |(\sin(2\zeta_1(t) - 2\zeta_1(t)) - (\sin(2\zeta_2(t) - 2\zeta_2(t)))| \leq \\ & \leq \frac{5}{2} \operatorname{ch}(2\pi\alpha + 1)r \operatorname{ch} r |\zeta_2(t) - \zeta_1(t)|. \end{aligned}$$

Отсюда получаем оценку

$$\|\mathcal{G}(\zeta_1) - \mathcal{G}(\zeta_2)\|_C \leq 5\pi R \operatorname{ch}(2\pi\alpha + 1)r \operatorname{ch} r \|\zeta_2 - \zeta_1\|_C,$$

справедливую в шаре  $B(f_0, r)$ . Поскольку  $r < 1/10$ , то число  $5\pi \operatorname{ch} r$  не превосходит 16 и тогда

$$\|\mathcal{G}(\zeta_1) - \mathcal{G}(\zeta_2)\|_C \leq 2kr \|\zeta_2 - \zeta_1\|_C.$$

Шаг 3 завершен.

*Шаг 4. Доказательство оценок (13), (15) и (14).* Используя разложение (20), запишем уравнение (16) в виде

$$\zeta = F(f_0) - f_0 + G_1(\zeta) + \mathcal{G}(\zeta), \quad \text{где } \zeta = \eta - f_0,$$

которое мы в свою очередь преобразуем к виду

$$(23) \quad \eta = f_0 + (I - G_1)^{-1}(F(f_0) - f_0 + \mathcal{G}(\zeta)) := \Phi(\eta).$$

Покажем, что отображение  $\Phi = \Phi_{Q,\lambda}$  (здесь  $\lambda \in D_{Q,\alpha}$ ) корректно определено, является сжимающим в замкнутом шаре  $B(f_0, r)$  пространства  $C[0, \pi]$  и переводит его в себя. В Шаге 3 мы оценили норму операторов  $G_1$  и  $G_1^2$

$$\|G_1\|_C \leq 3\pi R \operatorname{ch}(2\pi\alpha + 1), \quad \|G_1^2\|_C \leq \frac{k^2}{2} \Upsilon_{p'}(\lambda) < \frac{1}{4k^2}.$$

Тогда при целых  $s \geq 1$  и  $\lambda \in D_{Q,\alpha}$  справедливы оценки

$$\|G_1^{2s}\|_C \leq \left(\frac{1}{4k^2}\right)^s < \left(\frac{1}{16}\right)^s, \quad \|G_1^{2s+1}\|_C \leq \frac{\pi k}{4} \left(\frac{1}{4k^2}\right)^s < \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{16}\right)^s.$$

Следовательно, оператор  $(I - G_1)^{-1} = I + G_1 + G_1^2 + \dots$  существует, причем его норма допускает оценку

$$(24) \quad \|(I - G_1)^{-1}\|_C \leq \sum_{j=0}^{\infty} \|G_1^j\|_C \leq 1 + \|G_1\|_C + 1 \leq 2 + 3\pi R \operatorname{ch}(2\pi\alpha + 1) < k.$$

Перейдем к оценкам отображения  $\Phi$ , определенного в (23). Для любого  $\eta = f_0 + \zeta$ , где  $\|\zeta\|_C \leq r$  из неравенств (19), (22) и (24) следует

$$\|\Phi(\eta) - f_0\|_C \leq \|(I - G_1)^{-1}\|_C (\|F(f_0) - f_0\|_C + \|\mathcal{G}(\zeta)\|_C) \leq k \left( \frac{k}{4} \Upsilon_{p'}(\lambda) + \frac{3k}{2} r^2 \right) \leq r,$$

поскольку  $k^2 \Upsilon_{p'} = r$ , а

$$k^2 r^2 = k^4 \Upsilon_{p'}(\lambda) r \leq \pi k^4 \Upsilon(\lambda) r \leq (\pi/8) r < r/2.$$

Таким образом, мы доказали, что отображение  $\Phi$  переводит замкнутый шар  $B(f_0, r)$  в себя. Далее

$$\|\Phi(\zeta_2) - \Phi(\zeta_1)\|_C \leq \|(I - G_1)^{-1}\|_C \|\mathcal{G}(\zeta_2) - \mathcal{G}(\zeta_1)\|_C \leq 2k^2 r \|\zeta_2 - \zeta_1\|_C.$$

Поскольку

$$2k^2 r = 2k^4 \Upsilon_{p'}(\lambda) < \pi/4 < 1,$$

отображение  $\Phi$  является сжимающим в шаре  $B(f_0, r)$  с коэффициентом сжатия  $q = 2k^4\Upsilon_{p'}(\lambda)$ . Применяя к  $\Phi$  принцип сжимающих отображений, получим существование решения уравнения (11) вида  $\theta(x, \lambda) = \lambda x + \eta(x, \lambda)$ , где функция  $\eta$  имеет вид  $\eta = f_0 + \zeta$ , а  $\zeta$  допускает оценку  $\|\zeta\|_C \leq r = k^2\Upsilon_{p'}(\lambda)$ . Таким образом, мы доказали асимптотическое представление (14). Представление (13) следует из (14) и (17). Оценка (15) производной функции  $\eta$  выводится из уравнения (16). Действительно, дифференцируя его, получим

$$\begin{aligned} |\eta'(x, \lambda)| &\leq \operatorname{ch}(2\pi\alpha + 2|\eta(x, \lambda)|) \left( |q_1(x)| + \frac{1}{2}(|q_2(x)| + |q_3(x)|) \right) \leq \\ &\leq \operatorname{ch}(2\pi\alpha + 1) \left( |q_1(x)| + \frac{1}{2}(|q_2(x)| + |q_3(x)|) \right), \end{aligned}$$

поскольку

$$|\eta(x, \lambda)| \leq \Upsilon(x, \lambda) + k^2\Upsilon_{p'}(\lambda) \leq (1 + \pi k^2)\Upsilon(\lambda) < 1/2.$$

Шаг 4 завершен.  $\square$

**Лемма 2.4.** Пусть  $Q \in L_1[0, \pi]$  и выполнены условия (i), (ii), (iii). Пусть  $\lambda \in D_{Q, \alpha}$  (см. определение в Лемме 2.3), а  $\theta(x, \lambda)$  — решение уравнения (11) с начальным условием  $\theta(0, \lambda) = 0$ . Тогда решение  $r(x, \lambda)$  уравнения (12) с начальным условием  $r(0, \lambda) = 1$  допускает представление

$$(25) \quad r(x, \lambda) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x (q_3(t) - q_2(t)) dt \right\} (1 + \rho(x, \lambda)),$$

где остаток  $\rho(x, \lambda)$  подчинен оценке

$$(26) \quad |\rho(x, \lambda)| \leq \Upsilon(x, \lambda) + 2k(2 + \pi k^2)\Upsilon_{p'}(\lambda), \quad \|\rho(x, \lambda)\|_{p'} \leq (1 + 4\pi k + 2\pi^2 k^3)\Upsilon_{p'}(\lambda).$$

Более того,

$$(27) \quad \rho(x, \lambda) = \int_0^x q_1(t) \sin(2\lambda t) dt - \frac{1}{2} \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \cos(2\lambda t) dt + \sigma(x, \lambda),$$

где

$$\|\sigma(x, \lambda)\|_C \leq 2k(2 + \pi k^2)\Upsilon_{p'}(\lambda).$$

При этом

$$(28) \quad |\rho'(x, \lambda)| \leq 2 \operatorname{ch}(2\pi\alpha + 1) \left( |q_1(x)| + \frac{1}{2}|q_2(x) + q_3(x)| \right)$$

почти всюду при  $x \in [0, \pi]$ .

*Доказательство.* Уравнение (12) решается явно

$$\begin{aligned} r(x, \lambda) &= \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^x (q_3(t) - q_2(t)) dt + \int_0^x q_1(t) \sin(2\theta(t, \lambda)) dt - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \cos(2\theta(t, \lambda)) dt \right) = \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^x (q_3(t) - q_2(t)) dt \right) \exp(H(x, \lambda)), \end{aligned}$$

где мы ввели обозначение

$$H(x, \lambda) = \int_0^x q_1(t) \sin(2\theta(t, \lambda)) dt - \frac{1}{2} \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \cos(2\theta(t, \lambda)) dt.$$

Вначале мы оценим разность

$$(29) \quad \left| \int_0^x q_1(t) \sin(2\theta(t, \lambda)) dt - \int_0^x q_1(t) \sin(2\lambda t) dt \right| \leq \left| \int_0^x q_1(t) \sin(2\lambda t) (\cos(2\eta(t, \lambda)) - 1) dt \right| + \left| \int_0^x q_1(t) \cos(2\lambda t) \sin(2\eta(t, \lambda)) dt \right|,$$

воспользовавшись представлением (13). В силу неравенств (7)

$$|\cos(2\eta(t, \lambda)) - 1| \leq 2|\eta(t, \lambda)|^2 \operatorname{ch}(2|\eta(t, \lambda)|).$$

Поскольку  $|\eta(t, \lambda)| \leq (1 + k^2)\Upsilon(t, \lambda) \leq 1/2$ , получаем

$$\|\cos(2\eta(t, \lambda)) - 1\|_{p'} \leq (1 + \pi k^2)(\operatorname{ch} 1)\Upsilon_{p'}(\lambda).$$

Таким образом, первый интеграл в правой части (2) не превосходит  $R \operatorname{ch}(2\pi\alpha)(\operatorname{ch} 1)(1 + \pi k^2)\Upsilon_{p'}(\lambda)$ . Второй интеграл в правой части (2) оценим следующим образом: так как  $|\sin(2\eta(t, \lambda))| \leq 2(\operatorname{ch} 1)|\eta(t, \lambda)|$ , то

$$\|\sin(2\eta(t, \lambda))\|_{p'} \leq 2(\operatorname{ch} 1)(1 + \pi k^2)\Upsilon_{p'}(\lambda),$$

а сам интеграл не превосходит  $2R \operatorname{ch}(2\pi\alpha)(\operatorname{ch} 1)(1 + \pi k^2)\Upsilon_{p'}(\lambda)$ . Итак,

$$\left| \int_0^x q_1(t) \sin(2\theta(t, \lambda)) dt - \int_0^x q_1(t) \sin(2\lambda t) dt \right| \leq 5R \operatorname{ch}(2\pi\alpha)(1 + \pi k^2)\Upsilon_{p'}(\lambda).$$

Аналогично

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \cos(2\theta(t, \lambda)) dt - \frac{1}{2} \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \cos(2\lambda t) dt \right| \leq 5R \operatorname{ch}(2\pi\alpha)(1 + \pi k^2)\Upsilon_{p'}(\lambda).$$

Положим

$$(30) \quad H_0(x, \lambda) = \int_0^x q_1(t) \sin(2\lambda t) dt - \frac{1}{2} \int_0^x (q_2(t) + q_3(t)) \cos(2\lambda t) dt,$$

Тогда  $|H_0(x, \lambda)| \leq \Upsilon(x, \lambda)$ . Заметим, что в области  $D_{Q, \alpha}$  выполнено

$$|H(x, \lambda)| \leq 5R \operatorname{ch}(2\pi\alpha)(1 + \pi k^2)\Upsilon_{p'}(\lambda) + \Upsilon(x, \lambda) \leq (5\pi R \operatorname{ch}(2\pi\alpha)(1 + \pi k^2) + 1)\Upsilon(\lambda) \leq \frac{1}{2}.$$

Тогда, в силу неравенств (7),

$$\exp(H(x, \lambda)) = \exp(H_0(x, \lambda))(1 + \sigma_1(x, \lambda)),$$

где

$$\|\sigma_1(x, \lambda)\|_C \leq 10R \operatorname{ch}(2\pi\alpha)(1 + \pi k^2)\Upsilon_{p'}(\lambda).$$

Обратимся к выражению  $\exp(H_0(x, \lambda))$ . Вновь применяя неравенства (7), получим

$$|\exp(H_0(x, \lambda)) - 1 - H_0(x, \lambda)| \leq |H_0(x, \lambda)|^2 \leq |\Upsilon(x, \lambda)|^2 \leq 8R \operatorname{ch}(2\pi\alpha)\Upsilon_{p'}(\lambda),$$

где мы воспользовались оценкой (8). Итак,

$$\exp(H(x, \lambda)) = (1 + H_0(x, \lambda) + \sigma_0(x, \lambda))(1 + \sigma_1(x, \lambda)),$$

где

$$\|\sigma_1(x, \lambda)\|_C \leq 10R \operatorname{ch}(2\pi\alpha)(1 + \pi k^2)\Upsilon_{p'}(\lambda) \leq 1,$$

$$\|\sigma_0(x, \lambda)\|_C \leq 8R \operatorname{ch}(2\pi\alpha)\Upsilon_{p'}(\lambda) \leq (1/16).$$

Раскрывая скобки в последней формуле, получим представление (27). Оценки (26) следуют из (27) и (30). Оценка (28) следует из уравнения (12) и представления (25).  $\square$

**Теорема 2.5.** Пусть  $Q \in L_1[0, \pi]$  и выполнены условия (i), (ii), (iii). Пусть  $\alpha > 0$  — произвольное фиксированное число,  $\Pi_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} \lambda| < \alpha\}$ , а

$$D_{Q,\alpha} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| < \alpha, \Upsilon(\lambda) < \frac{1}{8k^4} \right\}, \quad \text{где } k = 2 + 12R \operatorname{ch}(2\pi\alpha).$$

Тогда для любого  $\lambda \in D_{Q,\alpha}$  решение  $\mathbf{s}(x, \lambda) = (s_1(x, \lambda), s_2(x, \lambda))^t$  допускает представление

$$(31) \quad \begin{aligned} s_1(x, \lambda) &= -\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x (q_3(t) - q_2(t)) dt \right\} \sin(\lambda x) + \rho_1(x, \lambda), \\ s_2(x, \lambda) &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x (q_3(t) - q_2(t)) dt \right\} \cos(\lambda x) + \rho_2(x, \lambda), \end{aligned}$$

где  $|\rho_j(x, \lambda)| \leq M(\Upsilon(x, \lambda) + \Upsilon_{p'}(\lambda))$ ,  $M = M(R, \alpha)$ . Более того,

$$\rho_j(x, \lambda) = \rho_{j,1}(x, \lambda) \cos(\lambda x) + \rho_{j,2}(x, \lambda) \sin(\lambda x),$$

где  $|\rho'_{j,k}(x)| \leq M(\alpha) (|q_1(x)| + |q_2(x) + q_3(x)|/2)$ .

*Доказательство.* В соответствии с заменой (9) имеем представления

$$\mathbf{s}_1(x, \lambda) = -r(x, \lambda) \sin \theta(x, \lambda), \quad \mathbf{s}_2(x, \lambda) = r(x, \lambda) \cos \theta(x, \lambda).$$

Подставляя разложения, полученные в Леммах 2.3 и 2.4, например для  $\mathbf{s}_1$  получаем

$$\mathbf{s}_1(x, \lambda) = -\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x (q_3(t) - q_2(t)) dt \right\} (1 + \rho(x, \lambda)) (\sin(\lambda x) \cos(\eta(x, \lambda)) + \cos(\lambda x) \sin(\eta(x, \lambda))).$$

В очередной раз используя оценки (7), а также (13) и (25), после раскрытия скобок, получим асимптотическую формулу для  $\mathbf{s}_1(x, \lambda)$ . Случай  $\mathbf{s}_2(x, \lambda)$  аналогичен.  $\square$

**Теорема 2.6.** Пусть  $Q \in L_1[0, \pi]$  и выполнены условия (i), (ii), (iii). Пусть  $\alpha > 0$  — произвольное фиксированное число,  $\Pi_\alpha = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} \lambda| < \alpha\}$ , а

$$D_{Q,\alpha} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \lambda| < \alpha, \Upsilon(\lambda) < \frac{1}{8k^4} \right\}, \quad \text{где } k = 2 + 12R \operatorname{ch}(2\pi\alpha).$$

Тогда для любого  $\lambda \in D_{Q,\alpha}$  решение  $\mathbf{c}(x, \lambda) = (c_1(x, \lambda), c_2(x, \lambda))^t$  допускает представление

$$\begin{aligned} c_1(x, \lambda) &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x (q_3(t) - q_2(t)) dt \right\} \cos(\lambda x) + \rho_1(x, \lambda), \\ c_2(x, \lambda) &= \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x (q_3(t) - q_2(t)) dt \right\} \sin(\lambda x) + \rho_2(x, \lambda), \end{aligned}$$

где  $|\rho_j(x, \lambda)| \leq M(\Upsilon(x, \lambda) + \Upsilon_{p'}(\lambda))$ ,  $M = M(R, \alpha)$ . Более того,

$$\rho_j(x, \lambda) = \rho_{j,1}(x, \lambda) \cos(\lambda x) + \rho_{j,2}(x, \lambda) \sin(\lambda x),$$

где  $|\rho'_{j,k}(x)| \leq M(\alpha) (|q_1(x)| + |q_2(x) + q_3(x)|/2)$ .

*Доказательство.* Укажем, какие изменения нужно провести, повторяя доказательство предыдущей теоремы. В системе  $l_Q \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}$  сделаем замену

$$y_1(x, \lambda) = r(x, \lambda) \cos \theta(x, \lambda), \quad y_2(x, \lambda) = r(x, \lambda) \sin \theta(x, \lambda).$$

Тогда систему можно записать в виде

$$\begin{aligned} r' \sin \theta + r \theta' \cos \theta + q_1 r \cos \theta + q_2 r \sin \theta &= \lambda r \cos \theta, \\ -r' \cos \theta + r \theta' \sin \theta + q_3 r \cos \theta - q_1 r \sin \theta &= \lambda r \sin \theta. \end{aligned}$$

Умножим первое уравнение на  $\cos \theta$  и прибавим второе уравнение, умноженное на  $\sin \theta$ . В результате получим уравнение для функции  $\theta(x, \lambda)$

$$(32) \quad \theta'(x, \lambda) + q_1(x) \cos 2\theta(x, \lambda) + \frac{1}{2}(q_2(x) + q_3(x)) \sin 2\theta(x, \lambda) = \lambda x,$$

с начальным условием  $\theta(0, \lambda) = 0$ . Если мы умножим первое уравнение на  $\sin \theta$  и вычтем второе уравнение, умноженное на  $\cos \theta$ , то получим уравнение на функцию  $r(x, \lambda)$

$$(33) \quad r'(x, \lambda) = r(x, \lambda) \left[ \frac{1}{2}(q_3(x) - q_2(x)) - q_1(x) \sin 2\theta(x, \lambda) + \frac{1}{2}(q_2(x) + q_3(x)) \cos 2\theta(x, \lambda) \right]$$

с начальным условием  $r(0, \lambda) = 1$ . Уравнение (32) отличается от (11) заменой знаков у функций  $q_j$ , так что результат Леммы 2.3 сохраняется с очевидными изменениями. Аналогично обстоит дело и с уравнением (33). Подставляя разложения, полученные в двух леммах, получаем утверждение теоремы.  $\square$

### 3. ОПЕРАТОР ДИРАКА С НУЛЕВЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

**3.1.** Здесь мы приведем нужные нам факты о простейшем операторе Дирака  $L_{0,U}$ , порожденным дифференциальным выражением

$$(34) \quad l_0(\mathbf{y}) = -B\mathbf{y}', \quad \text{где } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

и регулярным краевым условием  $U(y) = 0$  вида (4). Большая часть этих утверждений хорошо известны (по крайней мере, для конкретных краевых условий: периодических, условий Дирихле или Дирихле-Неймана).<sup>3)</sup> В то же время, эти факты необходимы для понимания основных результатов следующего параграфа. Обозначим через

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \end{pmatrix}$$

расширенную матрицу, составленную из коэффициентов краевых условий. Как прежде через  $J_{sj}$  обозначаем определители, составленные из  $s$ -го и  $j$ -го столбцов этой матрицы.

**Теорема 3.1.** *Спектр оператора  $L_{0,U}$  составлен из собственных значений, которые можно записать двумя сериями*

$$(35) \quad \begin{cases} \lambda_n = -\frac{i}{\pi} \ln z_0 + 2n, & n \in \mathbb{Z} \\ \lambda_n = -\frac{i}{\pi} \ln z_1 + 2n, & n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Числа  $z_0, z_1$  есть корни квадратного уравнения

$$(36) \quad [J_{14} - J_{23} - i(J_{13} + J_{24})]z^2 + 2[J_{12} + J_{34}]z + [J_{14} - J_{23} + i(J_{13} + J_{24})] = 0,$$

а ветвь логарифма для определенности фиксируем в полосе  $\text{Im } z \in (-\pi, \pi]$ . В случае, если дискриминант квадратного уравнения (36) равен нулю, имеем  $z_0 = z_1$ , и тогда все собственные значения оператора  $L_{0,U}$  двукратны.

<sup>3)</sup>Факты об операторе  $L_{0,U}$  с произвольными регулярными краевыми условиями, приведенные в Теореме 3.1 и Замечании 3.2, большей частью содержатся в статье [5] Джакова и Митягина. Однако, для удобства читателя, мы приведем их с доказательством (оно отличается от доказательства в [5]).



Для удобства мы будем в дальнейшем нумеровать числа  $\lambda_n$  одним индексом  $n \in \mathbb{Z}$ , объединяя две серии (35) в одну  $\lambda_n = \varkappa_j + n$ , где

$$\begin{aligned} \varkappa_j &= \varkappa_{j(n)} = -i\pi^{-1} \ln z_0 && \text{для четных } n; \\ \varkappa_j &= \varkappa_{j(n)} = 1 - i\pi^{-1} \ln z_1 && \text{для нечетных } n. \end{aligned}$$

*Доказательство.* Легко видеть, что решением уравнения  $l_0(\mathbf{y}) = \lambda \mathbf{y}$  с начальными условиями  $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$  является функция

$$\mathbf{c}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \cos(\lambda x) \\ -\sin(\lambda x) \end{pmatrix}.$$

Аналогично, решением того же уравнения с начальными условиями  $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$  является функция

$$\mathbf{s}(x, \lambda) = \begin{pmatrix} \sin(\lambda x) \\ \cos(\lambda x) \end{pmatrix}.$$

Общее решение уравнения  $l_0(\mathbf{y}) = \lambda \mathbf{y}$  имеет вид  $\mathbf{y} = \gamma_1 \mathbf{c} + \gamma_2 \mathbf{s}$ . Подставляя это выражение в краевые условия получаем систему

$$(37) \quad \begin{cases} [u_{12} + u_{13} \sin \pi \lambda + u_{14} \cos \pi \lambda] \gamma_1 + [u_{11} + u_{13} \cos \pi \lambda - u_{14} \sin \pi \lambda] \gamma_2 = 0, \\ [u_{22} + u_{23} \sin \pi \lambda + u_{24} \cos \pi \lambda] \gamma_1 + [u_{21} + u_{23} \cos \pi \lambda - u_{24} \sin \pi \lambda] \gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Обозначим матрицу этой системы через  $M(\lambda)$ . Число  $\lambda \in \mathbb{C}$  является собственным значением оператора  $L_{0,U}$  тогда и только тогда, когда определитель  $\Delta_0(\lambda) := \det M(\lambda) = 0$ . Учитывая конкретный вид решений  $\mathbf{c}(x, \lambda)$  и  $\mathbf{s}(x, \lambda)$ , получаем следующее выражение для характеристического определителя

$$(38) \quad \Delta_0(\lambda) = \frac{1}{2}[J_{14} - J_{23} - i(J_{13} + J_{24})]e^{i\pi\lambda} + [J_{12} + J_{34}] + \frac{1}{2}[J_{14} - J_{23} + i(J_{13} + J_{24})]e^{-i\pi\lambda}.$$

Сделав подстановку  $e^{i\pi\lambda} = z$  в уравнении  $\Delta_0(\lambda) = 0$ , получим квадратное уравнение (36) для переменной  $z$ . Сделав обратную подстановку, получим утверждение теоремы.  $\square$

Оператор  $L_{0,U}$  назовем *сильно регулярным*, если дискриминант квадратного уравнения (36) отличен от нуля, т.е. корни  $z, z_1$  различны.

**Замечание 3.2.** Если краевое условие не является регулярным (например, если коэффициент при  $e^{i\pi\lambda}$  в (38) равен нулю), то в случае неравенства нулю коэффициента при  $e^{-i\pi\lambda}$  спектр оператора  $L_{0,U}$  будет состоять из одной серии простых собственных значений  $\lambda_n = \varkappa + 2n, n \in \mathbb{Z}$ . Если первый и третий коэффициенты равны нулю оба, то  $\Delta_0(\lambda) = J_{12} + J_{34}$ . Тогда собственных значений нет, если  $J_{12} + J_{34} \neq 0$  и спектр вся комплексная плоскость, если  $J_{12} + J_{34} = 0$ . Легко видеть, что все три ситуации реализуемы. Например,  $\Delta_0(\lambda) \equiv 0$ , если

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ \beta & -\beta & \beta & -\beta \end{pmatrix} \quad 0 \neq \beta \in \mathbb{C}.$$

**Теорема 3.3.** Нормированные собственные функции  $\mathbf{y}_n, n \in \mathbb{Z}$  сильно регулярного оператора  $L_{0,U}$  имеют вид

$$(39) \quad \begin{cases} \mathbf{y}_n = \gamma_{1,0} \begin{pmatrix} \cos(\lambda_n x) \\ -\sin(\lambda_n x) \end{pmatrix} + \gamma_{2,0} \begin{pmatrix} \sin(\lambda_n x) \\ \cos(\lambda_n x) \end{pmatrix}, & n \in \mathbb{Z}, \quad \text{если } n \text{ четно,} \\ \mathbf{y}_n = \gamma_{1,1} \begin{pmatrix} \cos(\lambda_n x) \\ -\sin(\lambda_n x) \end{pmatrix} + \gamma_{2,1} \begin{pmatrix} \sin(\lambda_n x) \\ \cos(\lambda_n x) \end{pmatrix}, & n \in \mathbb{Z}, \quad \text{если } n \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Числа  $\gamma_{i,j}$ , где  $i = 1, 2, j = 0, 1$  определяются краевыми условиями и не зависят от  $n$ .

*Доказательство.* Собственные функции, введенные в доказательстве предыдущей теоремы имеют вид

$$\mathbf{y}_n = \gamma_1 \mathbf{c}(x, \lambda_n) + \gamma_2 \mathbf{s}(x, \lambda_n).$$

При этом числа  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  есть решения системы (37), в которой  $\lambda = \lambda_n$ . Учитывая, что матрица этой системы 2-периодична по параметру  $\lambda$  приходим к тому, что числа  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  зависят лишь от четности индекса  $n$ . Остается подставить выражения для функций  $\mathbf{c}(x, \lambda_n)$  и  $\mathbf{s}(x, \lambda_n)$  и мы придем к формулам (39) для ненормированных собственных функций. Очевидно, норма  $\|\mathbf{y}_n\|$  также зависит лишь от четности индекса  $n$ . Таким образом, формулы (39) сохраняются для  $\mathbf{y}_n/\|\mathbf{y}_n\|$ .  $\square$

**Теорема 3.4.** Резольвента  $R_0(\lambda) = (L_{0,U} - \lambda I)^{-1}$  регулярного оператора  $L_{0,U}$  является интегральным оператором

$$(40) \quad R_0(\lambda)\mathbf{f} = \int_0^\pi G_0(x, t, \lambda)\mathbf{f}(t)dt.$$

Функция  $G_0(x, t, \lambda)$  непрерывна на квадрате  $(x, t) \in [0, \pi]^2$  за исключением диагонали  $x = t$ . Вне  $\delta$ -кружков с центрами в нулях  $\lambda_n$  определителя  $\Delta_0(\lambda)$  (в частности, вне некоторой полосы  $|\operatorname{Im}\lambda| > \alpha$ ) функция  $G_0(x, t, \lambda)$  удовлетворяет оценке  $|G_0(x, t, \lambda)| \leq M$  с некоторой константой  $M$  зависящей от краевых условий и числа  $\delta$  (или  $\alpha$ ), но не зависящей от  $x, t$  и  $\lambda$ .

*Доказательство.* Применим метод вариации постоянных к уравнению  $l_0(\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{y} + \mathbf{f}$ . Тогда решение примет вид

$$(41) \quad \begin{cases} y_1(x) = \gamma_1 \sin \lambda x + \gamma_2 \cos \lambda x - \int_x^\pi \cos \lambda(x-t)f_1(t)dt + \int_x^\pi \sin \lambda(x-t)f_2(t)dt, \\ y_2(x) = \gamma_1 \cos \lambda x - \gamma_2 \sin \lambda x + \int_x^\pi \sin \lambda(x-t)f_1(t)dt + \int_x^\pi \cos \lambda(x-t)f_2(t)dt. \end{cases}$$

Подставив это решение в краевые условия, получим систему из двух уравнений для определения чисел  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ :

$$M_0 \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \hat{f}(\lambda),$$

где матрица  $M_0(\lambda)$  определена в Теореме 3.1, а

$$\hat{f}(\lambda) = \begin{pmatrix} \int_0^\pi \cos \lambda t f_1(t)dt + \int_0^\pi \sin \lambda t f_2(t)dt \\ \int_0^\pi \sin \lambda t f_1(t)dt - \int_0^\pi \cos \lambda t f_2(t)dt \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_0(\lambda)} \begin{pmatrix} u_{21} + u_{23} \cos \pi \lambda - u_{24} \sin \pi \lambda & -u_{11} - u_{13} \cos \pi \lambda + u_{14} \sin \pi \lambda \\ -u_{22} - u_{23} \sin \pi \lambda - u_{24} \cos \pi \lambda & u_{12} + u_{13} \sin \pi \lambda + u_{14} \cos \pi \lambda \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \hat{f}(\lambda)$$

и формула (40) следует из (41).

Докажем оценку функции  $G_0(x, t, \lambda)$ . Проведем доказательство на треугольнике  $t < x$  — на втором треугольнике оценки проводятся аналогично. Согласно (41), матриц-функция

$G_0(x, t, \lambda)$  при  $t < x$  имеет вид

$$G_0(x, t, \lambda) = \frac{1}{\Delta_0(\lambda)} \begin{pmatrix} \sin \lambda x & \cos \lambda x \\ \cos \lambda x & -\sin \lambda x \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} u_{21} + u_{23} \cos \pi \lambda - u_{24} \sin \pi \lambda & -u_{11} - u_{13} \cos \pi \lambda + u_{14} \sin \pi \lambda \\ -u_{22} - u_{23} \sin \pi \lambda - u_{24} \cos \pi \lambda & u_{12} + u_{13} \sin \pi \lambda + u_{14} \cos \pi \lambda \end{pmatrix} \\ \times \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \lambda t & \sin \lambda t \\ \sin \lambda t & -\cos \lambda t \end{pmatrix}.$$

Перемножая матрицы (мы опускаем здесь вычисления), получаем

$$G_0(x, t, \lambda) = \frac{1}{\Delta_0(\lambda)} \left[ \begin{pmatrix} 0 & J_{12} \\ J_{12} & 0 \end{pmatrix} \sin \lambda(x-t) + \begin{pmatrix} -J_{12} & 0 \\ 0 & J_{12} \end{pmatrix} \cos \lambda(x-t) + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} J_{23} & J_{13} \\ J_{24} & J_{14} \end{pmatrix} \sin \lambda t \sin \lambda(x-\pi) + \begin{pmatrix} -J_{24} & -J_{14} \\ J_{23} & J_{13} \end{pmatrix} \sin \lambda t \cos \lambda(\pi-x) + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} J_{13} & -J_{23} \\ J_{14} & -J_{24} \end{pmatrix} \cos \lambda t \sin \lambda(x-\pi) + \begin{pmatrix} -J_{14} & J_{24} \\ J_{13} & -J_{23} \end{pmatrix} \cos \lambda t \cos \lambda(\pi-x) \right].$$

Из представления (38), очевидно, следует оценка  $\Delta_0(\lambda) \geq C e^{|\pi I m \lambda|}$  вне  $\delta$ -кружков с центрами в нулях  $\lambda_n$  с константой  $C$ , зависящей только от  $\delta$  и чисел  $J_{sj}$ . Но все слагаемые в последнем представлении, заключенные в квадратные скобки, очевидно, оцениваются сверху такой же величиной (но с другой константой) при  $0 \leq t \leq x \leq \pi$ . Это доказывает теорему  $\square$

**Следствие 3.5.** Система собственных функций регулярного оператора  $L_{0,U}$  является полной в пространстве  $\mathbb{H}$ .

*Доказательство.* Обозначим  $R_0(\lambda) = (L_{0,U} - \lambda)^{-1}$ . Если найдется вектор  $\mathbf{f} \in \mathbb{H}$  ортогональный всем собственным функциям оператора  $L_{0,U}$ , то вектор-функция  $\mathbf{F}(\lambda) = R_0^*(\lambda)\mathbf{f}$  является целой (условие ортогональности  $\mathbf{f}$  собственным функциям обеспечивает равенство нулю всех вычетов в полюсах резольвенты сопряженного оператора). Вне  $\delta$ -кружков с центрами в собственных значениях  $\bar{\lambda}_n$  сопряженного оператора функция  $\mathbf{F}(\lambda)$  оценивается константой. При достаточно малом  $\delta > 0$  эти кружки не пересекаются. Из принципа максимума и теоремы Лиувилля тогда следует, что  $\mathbf{F}(\lambda) = \mathbf{g}$  — постоянный вектор. Но справедливо равенство  $(L_{0,U}^* - \lambda)\mathbf{f} = \mathbf{g}$ . Правая часть от  $\lambda$  не зависит, поэтому  $\mathbf{f} = 0$ .  $\square$

**3.2.** Из общей теории (см. [37, Гл. 3, §6]) следует, что сопряженный к  $L_{0,U}$  оператор  $L_{0,U}^* = L_{0,U^*}$  порожден тем же дифференциальным выражением (34) и краевым условием

$$U^*(y) = \hat{A}\mathbf{y}(0) + \hat{B}\mathbf{y}(\pi) = 0,$$

где  $\hat{A}, \hat{B}$  — некоторые  $2 \times 2$  матрицы. Повторяя рассуждения из работы Крейна [38], можно показать, что эти матрицы определяются соотношением

$$AJ\hat{A} = BJ\hat{B}, \quad \text{где } J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подробное доказательство этого факта мы не приводим, так как далее это утверждение не используется. Важно заметить следующее: Если краевое условие  $U(\mathbf{y}) = 0$  является регулярным, то тем же свойством обладает сопряженное краевое условие  $U(\mathbf{y}) = 0$ . Действительно, собственные значения  $\lambda_n$  и  $\bar{\lambda}_n$  операторов  $L_{0,U}$  и  $L_{0,U^*}$  взаимно сопряжены, причем их кратности совпадают. Если краевое условие  $U^*(\mathbf{y}) = 0$  нерегулярное, то реализуется одна из возможностей, описанных в Замечании 3.2. Но это не согласуется с

равенствами  $\lambda_n = \overline{\lambda_n}$  с сохранением кратностей. Таким образом, сопряженный оператор  $L_{0,U^*}$  регулярен одновременно с  $L_{0,U}$ .

Для доказательства Теоремы 3.7 нам понадобится следующее простое утверждение.

**Лемма 3.6.** *Пусть*

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \gamma_1 \begin{pmatrix} \cos(n + \omega)x \\ -\sin(n + \omega)x \end{pmatrix} + \gamma_2 \begin{pmatrix} \sin(n + \omega)x \\ \cos(n + \omega)x \end{pmatrix}, \\ \mathbf{z} &= \gamma'_1 \begin{pmatrix} \cos(n + \omega')x \\ -\sin(n + \omega')x \end{pmatrix} + \gamma'_2 \begin{pmatrix} \sin(n + \omega')x \\ \cos(n + \omega')x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда

$$(\mathbf{y}, \mathbf{z})_{\mathbb{H}} = (\gamma_1 \overline{\gamma'_1} + \gamma_2 \overline{\gamma'_2}) \frac{\sin \pi(\omega - \overline{\omega'})}{\omega - \overline{\omega'}} + (\gamma_1 \overline{\gamma'_2} - \gamma_2 \overline{\gamma'_1}) \frac{1 - \cos \pi(\omega - \overline{\omega'})}{\omega - \overline{\omega'}},$$

где при равенстве  $\omega = \overline{\omega'}$  первая дробь полагается равной  $\pi$ , а вторая — нулю.

*Доказательство.* Доказательство получается непосредственным вычислением.  $\square$

Напомним, что система векторов в гильбертовом пространстве  $H$  называется базисом Рисса, если существует ограниченный и обратимый оператор в  $H$ , который переводит эту систему в ортонормированный базис. Система  $\varphi_k$  в  $H$  называется *бесселевой системой*, если для любого вектора  $f \in H$  ряд  $\sum |\langle f, g \rangle|^2$  сходится. Системы  $\{\varphi_k\}$  и  $\{\psi_k\}$  называются *биортогональными*, если  $\langle \varphi_k, \psi_j \rangle = \delta_{kj}$ , где  $\delta_{kj}$  — символ Кронекера. Систему  $\{\varphi_k\}$  называют *почти нормированной*, если числа  $\|\varphi_k\|$  равномерно ограничены и равномерно отделены от нуля.

**Теорема 3.7.** *Нормированная система собственных функций сильно регулярного оператора  $L_{0,U}$  образует базис Рисса в пространстве  $\mathbb{H}$ .*

*Доказательство.* <sup>4)</sup> Вспомним, что собственные функции  $\mathbf{y}_n^0$  оператора  $L_{0,U}$  имеют представление (39). Так как оператор  $L_{0,U^*}$  тоже сильно регулярен, то его система собственных функций, согласно Теореме 3.3, имеет аналогичное представление

$$\begin{cases} \mathbf{z}_n = \gamma'_{1,0} \begin{pmatrix} \cos(\overline{\lambda_n}x) \\ -\sin(\overline{\lambda_n}x) \end{pmatrix} + \gamma'_{2,0} \begin{pmatrix} \sin(\overline{\lambda_n}x) \\ \cos(\overline{\lambda_n}x) \end{pmatrix}, & n \in \mathbb{Z}, \quad \text{если } n \text{ четно,} \\ \mathbf{z}_n = \gamma'_{1,1} \begin{pmatrix} \cos(\overline{\lambda_n}x) \\ -\sin(\overline{\lambda_n}x) \end{pmatrix} + \gamma'_{2,1} \begin{pmatrix} \sin(\overline{\lambda_n}x) \\ \cos(\overline{\lambda_n}x) \end{pmatrix}, & n \in \mathbb{Z}, \quad \text{если } n \text{ нечетно,} \end{cases}$$

Так как все собственные значения оператора  $L_{0,U}$  простые, то справедливы соотношения  $\langle \mathbf{y}_n, \mathbf{z}_j \rangle = \alpha_n \delta_{nj}$ , где числа  $\alpha_n$  зависят от нормировки систем функций  $\mathbf{y}_n^0$  и  $\mathbf{z}_n^0$ . Но, согласно Лемме 3.6, числа  $\alpha_n$  зависят только от четности  $n$ , т.е.  $\alpha_{2n} = \alpha_0, \alpha_{2n+1} = \alpha_1$ . Домножив векторы системы  $\{\mathbf{z}_n\}$  с четными номерами на константу  $\alpha_0^{-1}$ , а векторы с нечетными номерами — на константу  $\alpha_1^{-1}$  получим, что  $\{\mathbf{y}_n\}$  и  $\{\mathbf{z}_n\}$  взаимно биортогональны. Обе эти системы, очевидно, бесселевы и обе полны в  $\mathbb{H}$  согласно Следствию 3.5. Тогда в силу теоремы Бари–Боаса (см. [39, Гл. 6]) обе системы образуют базис Рисса в  $\mathbb{H}$ .  $\square$

Поясним теперь, что происходит в случае регулярных, но не сильно регулярных краевых условиях. Полезно рассмотреть оператор Дирака с нулевым потенциалом и и краевыми условиями  $y_1(0) = \alpha y_1(\pi)$ ,  $y_2(0) = y_2(\pi)$ . При любом  $\alpha \in \mathbb{C}$  спектр этого оператора состоит из собственных значений  $\lambda_n = 2n$ . Каждое такое собственное значение имеет алгебраическую кратность 2. При  $\alpha = 1$  геометрическая кратность каждого собственного значения также равна двум: есть две ортогональные друг другу собственные функции  $\mathbf{s}^0(x, \lambda_n)$  и  $\mathbf{c}^0(x, \lambda_n)$ . При  $\alpha \neq 1$  геометрическая кратность равна единице: собственной

<sup>4)</sup>Ср. с [5, Лемма 3.3]).

функцией является только функция  $\mathbf{s}^0(x, \lambda_n)$  и к ней имеется присоединенная. Это типичный пример, что следует из следующего предложения.

**Лемма 3.8.** *Пусть оператор Дирака  $L_{0,U}$  регулярен, но не сильно регулярен. Тогда либо все его собственные значения  $\lambda_n = 2n + \kappa$  имеют геометрическую кратность 2 и в этом случае им отвечают собственные функции  $\mathbf{c}^0(x, \lambda_n)$  и  $\mathbf{s}^0(x, \lambda_n)$ , либо всем его собственным значениям отвечают жордановы цепочки, т.е. только одна собственная функция вида*

$$\mathbf{y}_n^0(x) = \gamma_1 \mathbf{c}^0(x, \lambda_n) + \gamma_2 \mathbf{s}^0(x, \lambda_n)$$

*и присоединенная к ней функция вида*

$$(42) \quad \mathbf{y}_n^1(x) = \gamma_2 x \mathbf{c}^0(x, \lambda_n) - \gamma_1 x \mathbf{s}^0(s, \lambda_n) + \beta \gamma_1 \mathbf{c}^0(x, \lambda_n) + \beta \gamma_2 \mathbf{s}^0(s, \lambda_n).$$

*Здесь числа  $\gamma_1, \gamma_2$  от  $n$  не зависят. Число  $\beta$  можно подобрать так, что функции  $\mathbf{y}_n^0$  и  $\mathbf{y}_n^1$  будут взаимно ортогональными. При этом число  $\beta$  и нормы  $\|\mathbf{y}_n^0\|, \|\mathbf{y}_n^1\|$  также не зависят от  $n$ .*

*Доказательство.* Согласно определению, в условиях леммы имеем, что собственные значения оператора  $L_{0,U}$  имеют вид  $\lambda_n = 2n + \omega$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Наличие или отсутствие второго собственного вектора, отвечающего собственному значению  $\lambda_n$  определяется краевыми условиями, а точнее — матрицей  $M_0(\lambda)$ , введенной в (37). Эта матрица 2-периодична, поэтому собственные функции являются линейными комбинациями  $\mathbf{c}^0(x, \lambda_n)$  и  $\mathbf{s}^0(x, \lambda_n)$  с постоянными  $\gamma_1, \gamma_2$ , не зависящими от  $n$ . По определению, присоединенная функция  $\mathbf{y}^1(x)$  должна удовлетворять системе

$$\begin{cases} -y'_2 - \lambda_n y_1 = \gamma_1 \cos(\lambda_n x) + \gamma_2 \sin(\lambda_n x), \\ y'_1 - \lambda_n y_2 = -\gamma_1 \sin(\lambda_n x) + \gamma_2 \cos(\lambda_n x), \end{cases}$$

общим решением которой является функция

$$\gamma_2 x \mathbf{c}^0(x, \lambda_n) - \gamma_1 x \mathbf{s}^0(s, \lambda_n) + \beta_1 \mathbf{c}^0(x, \lambda_n) + \beta_2 \mathbf{s}^0(s, \lambda_n)$$

с произвольными постоянными  $\beta_1, \beta_2$ . Подставляя эту функцию в краевое условие, найдем соотношение между  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . Проверка независимости норм функций  $\mathbf{y}_n^0, \mathbf{y}_n^1$  от  $n$  осуществляется элементарным вычислением аналогично Лемме 3.6.  $\square$

Если собственным значениям  $\lambda_n$  оператора  $L_{0,U}$  отвечают жордановы цепочки  $\mathbf{y}_n^0, \mathbf{y}_n^1$ , то собственным значениям  $\bar{\lambda}_n$  сопряженного оператора  $L_{0,U}^*$  также отвечают жордановы цепочки  $\mathbf{z}_n^0, \mathbf{z}_n^1$  того же вида. Из общих соотношений биортогональности для взаимно сопряженных операторов (см., например, [40]) следует

$$\langle \mathbf{z}_n^0, \mathbf{y}_n^0 \rangle = 0, \quad \langle \mathbf{z}_n^0, \mathbf{y}_n^1 \rangle = \alpha_n = \alpha \neq 0, \quad \langle \mathbf{z}_n^1, \mathbf{y}_n^0 \rangle = \alpha'_n = \alpha' \neq 0.$$

Проводя, если надо перенормировку, можем считать, что  $\alpha = \alpha' = 1$ . Заменяя, если нужно  $\mathbf{z}_n^1$  на  $\mathbf{z}_n^1 + \beta \mathbf{z}_n^0$  (такая функция остается присоединенной к  $\mathbf{z}_n^0$ ), можно добиться равенства  $\langle \mathbf{y}_n^1, \mathbf{z}_n^1 \rangle = 0$ . Тогда можно считать, что системы  $\{\mathbf{y}_n^0, \mathbf{y}_n^1\}$  и  $\{\mathbf{z}_n^0, \mathbf{z}_n^1\}$  являются взаимно биортогональными. Но из вида этих систем следует, что они бесселевы. Обе системы полны в  $\mathbb{H}$ , а потому каждая из них образует базис Рисса. Тем самым доказан следующий факт (ср. с [5, Леммы 3.5 и 3.6]).

**Теорема 3.9.** *Собственные и присоединенные функции регулярного, но не сильно регулярного оператора  $L_{0,U}$  можно выбрать так, чтобы они образовывали базис Рисса в  $\mathbb{H}$ .*

**3.3.** Наконец докажем важную в дальнейшем оценку резольвенты  $R_0(\lambda) = (L_{0,U} - \lambda)^{-1}$  как оператора, действующего из  $L_p[0, \pi]$ . Далее через  $l_p$  обозначаются

обычные пространства двусторонних числовых последовательностей  $\{c_n\}$  с нормой

$$\|\{c_n\}\| = \left( \sum |c_n|^p \right)^{1/p}.$$

В доказательстве будет использован следующий известный результат (см., например, [43]).

**Теорема** (Хаусдорфа-Юнга). Пусть  $\varphi_n(x) = e^{2\pi i n x}$ ,  $c_n(f) = (f(x), \varphi_n(x))$ . Тогда при всех  $1 \leq p \leq 2$  оператор

$$Tf = \{c_n(f)\}_{-\infty}^{\infty}$$

является ограниченным из пространства  $L_p = L_p[0, \pi]$  в пространство  $l_{p'}$ , где  $1/p + 1/p' = 1$ .

**Теорема 3.10.** Пусть  $R_0(\lambda)$  — резольвента регулярного оператора  $L_{0,U}$ . Положим  $\lambda = \mu + i\tau$  и выберем число  $\alpha > 0$  так, чтобы все полюса резольвенты лежали внутри полосы  $|\operatorname{Im} \lambda| < \alpha$ . Тогда при всех  $\lambda$  вне этой полосы и при всех  $1 \leq p \leq 2 \leq q \leq \infty$  справедлива оценка

$$(43) \quad \|R_0(\lambda)\|_{L_p \rightarrow L_q} \leq C_{p,q} |\tau|^{-1+1/p-1/q},$$

с константой  $C_{p,q}$ , зависящей только от  $p$  и  $q$ , но не от  $\lambda$ .

*Доказательство.* Пусть  $L_{0,U}$  сильно регулярен. Рассмотрим сначала случай  $1 < p < q < \infty$ . Обозначим через  $p', q'$  числа, сопряженные по Гельдеру к  $p$  и  $q$ . В силу Теоремы 3.7 имеем представление для резольвенты

$$R_0(\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \mathbf{z}_n \rangle \mathbf{y}_n}{\lambda - \lambda_n}.$$

Обозначим  $f_k = \langle \mathbf{f}, \mathbf{z}_k \rangle$ ,  $g_k = \langle \mathbf{z}_k, \mathbf{g} \rangle$ . Тогда (для краткости мы пишем  $\|\cdot\|_p$  вместо  $\|\cdot\|_{L_p}$  и пользуемся неравенством Гельдера и теоремой Хаусдорфа-Юнга)

$$(44) \quad \begin{aligned} \|R_0(\lambda)\|_{L_p \rightarrow L_q} &= \sup_{\|f\|_p=1, \|g\|_{q'}=1} |\langle R_0(\lambda) \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle| \leq \\ &\leq \sum \frac{|f_n g_n|}{|\lambda - \lambda_n|} \leq \left( \sum |f_n|^{p'} \right)^{1/p'} \left( \sum \left( \frac{|g_n|}{|\lambda - \lambda_n|} \right)^p \right)^{1/p} \\ &\leq \|f\|_p \left( \sum |g_n|^q \right)^{\frac{1}{p} \frac{p}{q}} \left( \sum \left( \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|^p} \right)^{\left( \frac{q}{p} \right)'} \right)^{\frac{\beta}{p}} \leq \\ &\leq \|f\|_p \|g\|_q \left( \sum \left( \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|} \right)^\beta \right)^{1/\beta}, \end{aligned}$$

где  $\beta = p(q/p)' = \frac{pq}{q-p}$ . Из формул для  $\lambda_n$  легко получаем

$$\frac{1}{|\lambda - \lambda_n|} \leq \frac{C}{|\tau| + |\mu - n|},$$

поэтому

$$\left( \sum \left( \frac{1}{|\lambda - \lambda_n|} \right)^\beta \right)^{1/\beta} \leq C \left( \int_0^\infty \frac{dx}{(|\tau| + x)^\beta} \right)^{1/\beta} \leq C |\tau|^{1/\beta-1} = C |\tau|^{-1-1/q+1/p}.$$

Если  $p = 2 = q$ , то доказательство упрощается. В случае  $p = 1$ , и  $2 \leq q \leq \infty$  числа  $|f_n|$  оцениваются некоторой константой  $C$  и доказательство тоже упрощается. Наконец, в случае  $p = 1$  и  $q = \infty$ , наша оценка вытекает из представления (40) резольвенты как интегрального оператора и равномерной оценки в норме  $L_\infty$  функции Грина (см Теорему 3.4).

Если оператор  $L_{0,U}$  регулярен, но не сильно регулярен, то в случае отсутствия присоединенных функций доказательство не меняется. Если же присоединенные функции есть, то надо воспользоваться следующим представлением для резольвенты (см. [40])

$$R_0(\lambda) = \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \mathbf{z}_n^0 \rangle \mathbf{y}_n^1 + \langle \cdot, \mathbf{z}_n^1 \rangle \mathbf{y}_n^0}{\lambda - \lambda_n} + \frac{\langle \cdot, \mathbf{z}_n^0 \rangle \mathbf{y}_n^0}{(\lambda - \lambda_n)^2}.$$

Вторая сумма оценивается тривиально, а первая, с учетом бесселевости систем собственных и присоединенных функций, точно также как в сильно регулярном случае.  $\square$

#### 4. ОПЕРАТОР ДИРАКА С РЕГУЛЯРНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ.

**4.1** Для исследования регулярного оператора  $L_{Q,U}$  мы намерены воспользоваться полученными в параграфе 2 асимптотиками. Однако эти асимптотики получены только в произвольной полосе  $|\operatorname{Im} \lambda| < \alpha$ , вне полос нам асимптотики не известны. Поэтому важную роль играет следующий результат, который мы сейчас получим для случая, когда  $L_{0,U}$  сильно регулярен (потом мы покажем, что результат остается верным для произвольных регулярных  $L_{0,U}$ ).

**Теорема 4.1.** Пусть  $L_{0,U}$  сильно регулярен и  $Q \in L_1$ . Тогда найдется  $\alpha > 1$ , такое, что при  $|\operatorname{Im} \lambda| > \alpha$  резольвента  $R(\lambda) = (L_{Q,U} - \lambda)^{-1}$  существует (как оператор в  $\mathbb{H}$ ) и выполняется оценка

$$\|R(\lambda)\| \leq C |\operatorname{Im} \lambda|^{-1}$$

с постоянной  $C$ , зависящей от  $\alpha$ , но не зависящей от  $\lambda$  вне полосы  $\Pi_\alpha$ . При этом спектр оператора  $L_{Q,U}$  дискретен.

*Доказательство. Шаг 1.* Мы уже доказали, что резольвента  $R(\lambda_0) = (L_{Q,U} - \lambda_0)^{-1}$  существует при некотором  $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ , а значит образ  $R(\lambda_0)$  совпадает с областью определения оператора  $L_{Q,U}$ , а потому содержится в пространстве  $W_1^1$ . Но вложение  $W_1^1 \hookrightarrow L_2$  компактно. следовательно, оператор  $R(\lambda_0)$  компактен, а спектр  $L_{Q,U}$  дискретен.

*Шаг 2.* Обозначим  $R_0(\lambda) = (L_{0,U} - \lambda)^{-1}$  и запишем для резольвенты  $R(\lambda) = (L_{0,U} + Q - \lambda)^{-1}$  формальный ряд

$$(45) \quad R(\lambda) = R_0(\lambda) + R_0(\lambda)Q R_0(\lambda) + (R_0(\lambda)Q)^2 R_0(\lambda) + \dots$$

Все члены этого ряда корректно определены, так как оператор  $R_0(\lambda) : L_1 \rightarrow L_\infty$  ограничен. Наша цель показать, что нормы слагаемых в этом ряде убывают со скоростью геометрической прогрессии и ряд сходится в норме  $\mathbb{H}$ .

Фиксируем  $\varepsilon > 0$  (которое выберем позже) и найдем ограниченную функцию  $V(x)$ , такую, что

$$Q_\varepsilon(x) = Q(x) - V(x), \quad \|Q_\varepsilon(x)\|_1 \leq \varepsilon, \quad \|V(x)\|_\infty < C_\varepsilon.$$

Тогда  $(n+1)$ -е слагаемое  $[R_0(\lambda)(Q_\varepsilon + V)]^n R_0(\lambda)$  в ряде (45) запишется в виде  $S_n(\lambda)R_0(\lambda)$ , где  $S_n(\lambda)$  — сумма, полученная при раскрытии скобок в выражении  $[R_0(Q_\varepsilon + V)]^n$ . Эта сумма состоит из  $2^n$  слагаемых (обозначим их через  $T_{n,j}$ ,  $j = 1, \dots, 2^n$ ), каждое из которых является произведением  $n$  множителей вида  $R_0 Q_\varepsilon$  или  $R_0 V$ .

*Шаг 3.* Оценим норму каждого слагаемого  $\|T_{n,j}\|_{L_\infty \rightarrow L_2}$ . Для этого воспользуемся Теоремой 3.10, согласно которой найдется число  $\alpha_0$ , такое, что при  $\tau = |\operatorname{Im} \lambda| \geq \alpha_0$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|R_0(\lambda)\|_{L_2 \rightarrow L_2} &< C\tau^{-1}, & \|R_0(\lambda)\|_{L_1 \rightarrow L_2} &< C\tau^{-1/2} \\ \|R_0(\lambda)\|_{L_2 \rightarrow L_\infty} &< C\tau^{-1/2}, & \|R_0(\lambda)\|_{L_1 \rightarrow L_\infty} &< C. \end{aligned}$$

Выберем теперь число  $\varepsilon$ , так, чтобы  $\delta = \varepsilon C < 1/4$ , а число  $\alpha > \alpha_0$  выберем так, чтобы

$$(46) \quad (\pi)^{1/2} C_\varepsilon C \alpha^{-1/2} < \delta.$$

Всюду далее оценки проводим при фиксированном  $\lambda$  и  $\tau = |\operatorname{Im} \lambda| > \alpha$ , где  $\alpha$  удовлетворяет (46). С учетом неравенств  $\|Q_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$ ,  $\|V\|_\infty < C_\varepsilon$  получаем

$$\|Q_\varepsilon\|_{L_\infty \rightarrow L_1} < \varepsilon, \quad \|V\|_{L_\infty \rightarrow L_2} \leq \pi^{1/2} C_\varepsilon.$$

Из приведенных оценок для резольвенты  $R_0(\lambda)$  отсюда следуют неравенства

$$\begin{aligned} \|R_0 Q_\varepsilon\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty} &\leq \|Q_\varepsilon\|_{L_\infty \rightarrow L_1} \|R_0\|_{L_1 \rightarrow L_\infty} \leq \varepsilon C \leq \delta, \\ \|R_0 Q_\varepsilon\|_{L_\infty \rightarrow L_2} &\leq \|Q_\varepsilon\|_{L_\infty \rightarrow L_1} \|R_0\|_{L_1 \rightarrow L_2} \leq \varepsilon C \tau^{-1/2} \leq \delta \tau^{-1/2} \\ \|R_0 V\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty} &\leq \|R_0\|_{L_2 \rightarrow L_\infty} \|V\|_{L_\infty \rightarrow L_2} \leq C \tau^{-1/2} \pi^{1/2} C_\varepsilon \leq \delta, \\ \|R_0 V\|_{L_\infty \rightarrow L_2} &\leq \|R_0\|_{L_2 \rightarrow L_2} \|V\|_{L_\infty \rightarrow L_2} \leq C \tau^{-1} \pi^{1/2} C_\varepsilon \leq \delta \tau^{-1/2}. \end{aligned}$$

Теперь мы можем оценить  $\|T_{n,j}\|_{L_\infty \rightarrow L_2}$ . Это произведение составлено из  $n$  множителей  $T_{n,j} = P_1 P_2 \dots P_n$ , каждый из которых равен либо  $R_0 Q_\varepsilon$ , либо  $R_0 V$ . Тогда

$$\|T_{n,j}\|_{L_\infty \rightarrow L_2} \leq \|P_1\|_{L_\infty \rightarrow L_2} \|P_2\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty} \dots \|P_n\|_{L_\infty \rightarrow L_\infty} \leq \delta \tau^{-1/2} \cdot \delta^{n-1} = \delta^n \tau^{-1/2}.$$

*Шаг 4.* Сумма  $S_n$  составлена из  $2^n$  операторов  $T_{n,j}$ , а значит

$$\|S_n\|_{L_\infty \rightarrow L_2} \leq 2^n \delta^n \tau^{-1/2} < 2^{-n} \tau^{-1/2}.$$

Тогда каждое слагаемое ряда (45) оценивается

$$\|S_n R_0(\lambda)\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq \|S_n\|_{L_\infty \rightarrow L_2} \|R_0\|_{L_2 \rightarrow L_\infty} \leq 2^{-n} \tau^{-1/2} C \tau^{-1/2} = 2^{-n} C \tau^{-1}.$$

Тем самым, ряд (45) сходится и оценивается величиной  $2C\tau^{-1}$ . Теорема доказана.  $\square$

#### 4.2 Далее введем обозначение

$$E(x) = \frac{1}{2} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^x (q_3(t) - q_2(t)) dt \right\}, \quad \text{и } E = E(\pi).$$

Эта функция играет важную роль. В следующей теореме мы покажем, что при добавлении к простейшему оператору  $L_{0,U}$  потенциала  $Q$  собственные значения возмущенного оператора  $L_{Q,U}$  асимптотически совпадают с двумя (или одной) сериями собственных значений невозмущенного оператора, если только  $E = 1$ , в частности, если  $q_2 = q_3$ . Но при  $E \neq 1$  это не так, собственные значения оператора  $L_{Q,U}$  асимптотически сближаются с собственными значениями другого простейшего оператора  $L_{0,U'}$ , порожденного краевым условием  $U'(\mathbf{y}) = 0$ , которому отвечает расширенная матрица

$$(47) \quad \mathcal{U}' = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & Eu_{13} & Eu_{14} \\ u_{21} & u_{22} & Eu_{23} & Eu_{24} \end{pmatrix}$$

В частности, собственные значения оператора  $L_{Q,U}$  асимптотически простые и равномерно отделены друг от друга, если и только если оператор  $L_{0,U'}$  имеет две несовпадающих серии собственных значений. Это оправдывает следующее определение: *Оператор  $L_{Q,U}$  назовем сильно регулярным, если сильно регулярен оператор  $L_{0,U'}$  порожденный краевым условием  $U'(\mathbf{y}) = 0$ , которому отвечает расширенная матрица (47).* Из определений следует, что операторы  $L_{Q,U}$  и  $L_{Q,U'}$  регулярны или не регулярны одновременно (поэтому можно говорить о регулярности краевых условий для оператора Дирака с произвольным потенциалом), но сильная регулярность зависит как от краевых условий, так и от потенциала.



Заметим, если краевое условие порождается матрицей (47), то согласно Теореме 3.1 оператор  $L_{0,U'}$  имеет две серии простых собственных значений (в случае совпадения они образуют двукратные собственные значения), имеющих асимптотику

$$(48) \quad \lambda_n^0 = \kappa_j + n,$$

где  $\kappa_j = \kappa_{j(n)} = j - i\pi^{-1} \ln z_j$ , где  $j = 0$ , если  $n$  четно и  $j = 1$ , если  $n$  нечетно, а числа  $z_0, z_1$  суть корни квадратного уравнения

$$(49) \quad E[J_{14} - J_{23} - i(J_{13} + J_{24})]z^2 + [J_{12} + E^2 J_{34}]z + E[J_{14} - J_{23} + i(J_{13} + J_{24})] = 0.$$

Считаем, что ветви догарифма в определении чисел  $\kappa_j$  выбраны так, что  $\operatorname{Re} \kappa_j \in (-1, 1]$ . Выберем  $\varepsilon > 0$  так, чтобы замкнутые кружки радиуса  $\varepsilon$  с центрами в собственных значениях (48) оператора  $L_{0,U'}$  не пересекались (в случае регулярных, но не сильно регулярных условий круги с номерами  $2n$  и  $2n+1$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , совпадают). Вспомним определение функции  $\Upsilon(x, \lambda)$  из параграфа 2 и для  $Q \in L_p$ ,  $p \in [1, 2]$ , определим числа

$$(50) \quad s_n(r) = \max_{|\lambda - \lambda_n^0| \leq r} (\Upsilon(\pi, \lambda) + \Upsilon_{p'}(\lambda)), \quad 0 \leq r \leq \varepsilon,$$

где  $1/p' + 1/p = 1$ . Из определения и Леммы 2.1 следует

**Лемма 4.2.** *Каков бы ни был суммируемый потенциал  $Q$  числа  $s_n(\varepsilon) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \pm\infty$*

Мы готовимся доказать первые результаты об асимптотическом поведении собственных значений оператора  $L_{Q,U}$  с регулярными условиями. Для проведения оценок нам будет удобно ввести следующие обозначения. Пусть

$$\mathbf{c}(x, \lambda) = (c_1(x, \lambda), c_2(x, \lambda))^t, \quad \mathbf{s}(x, \lambda) = (s_1(x, \lambda), s_2(x, \lambda))^t$$

— решения уравнения  $l(y) = \lambda y$ , определенные в параграфе 2. Общее решение этого уравнения имеет вид  $\mathbf{y} = \gamma_1 \mathbf{c} + \gamma_2 \mathbf{s}$ , где  $\gamma_1, \gamma_2$  — постоянные. Подставляя это решение в краевое условие  $U(\mathbf{y}) = 0$ , получаем

$$(51) \quad \begin{cases} [u_{12} + u_{13}s_1(\pi, \lambda) + u_{14}s_2(\pi, \lambda)]\gamma_1 + [u_{11} + u_{13}c_1(\pi, \lambda) - u_{14}c_2(\pi, \lambda)]\gamma_2 = 0, \\ [u_{22} + u_{23}s_1(\pi, \lambda) + u_{24}s_2(\pi, \lambda)]\gamma_1 + [u_{21} + u_{23}c_1(\pi, \lambda) - u_{24}c_2(\pi, \lambda)]\gamma_2 = 0. \end{cases}$$

Обозначим  $2 \times 2$  матрицу, порождающую эту однородную систему линейных уравнений через  $\mathcal{M}(\lambda)$ . Число  $\lambda \in \mathbb{C}$  является собственным значением оператора  $L_{Q,U}$  тогда и только тогда, когда определитель  $\Delta(\lambda) := \det \mathcal{M}(\lambda) = 0$ . После несложных вычислений приходим к следующему выражению для характеристического определителя

$$(52) \quad \Delta(\lambda) = J_{12} + J_{34} + J_{13}s_1(\pi, \lambda) + J_{14}s_2(\pi, \lambda) + J_{32}c_1(\pi, \lambda) + J_{42}c_2(\pi, \lambda).$$

Подставляя сюда асимптотические формулы (2.6) и (31), получим представление функции  $\Delta(\lambda)$  в полосе  $\Pi_\alpha$

$$(53) \quad \Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \delta(\lambda), \quad \text{где}$$

$$\Delta_0(\lambda) = J_{12} + J_{34} + \frac{E(\pi)e^{i\pi\lambda}}{2} [J_{14} + J_{32} - i(J_{42} - J_{13})] + \frac{E(\pi)e^{-i\pi\lambda}}{2} [J_{14} + J_{32} + i(J_{42} - J_{13})].$$

Мы видим, что определитель  $\Delta_0(\lambda)$  совпадает с характеристическим определителем ассоциированного оператора  $L_{0,U'}$ . Далее, из (2.6) и (31) следует, что при всех  $\lambda \in \Pi_\alpha$ , для которых

$$\Upsilon(\lambda) < 1/(8k^4), \quad \text{где } k = 2 + 12R \operatorname{ch}(2\pi\alpha + 1), \quad R = \|Q\|_{L_1},$$

выполнена оценка

$$(54) \quad |\delta(\lambda)| \leq M(R, \alpha) (\Upsilon(\pi, \lambda) + \Upsilon_{p'}(\lambda)) \leq (1 + \pi^{1/p'}) M(R, \alpha) \Upsilon(\lambda)$$

с некоторой константой  $M$ , определяемой по  $R$  и  $\alpha$ . Мы уже отмечали, что функция  $\Upsilon(\lambda) \rightarrow 0$  при  $\operatorname{Re} \lambda \rightarrow \pm\infty$ , а значит найдется такое число  $\beta > 0$ , что в области  $P_{\alpha,\beta} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} \lambda| < \alpha, |\operatorname{Re} \lambda| > \beta\}$  выполнено представление (53) с оценкой (54).

Определитель  $\Delta^0$  равен нулю при  $\lambda = \lambda_n^0$ . Если краевые условия усиленно регулярны, то все его нули просты и тогда в круге  $|\lambda - \lambda_n^0| < \varepsilon$ , где число  $\varepsilon$  определено выше, выполнена оценка  $|\Delta^0(\lambda)| > c_1 |\lambda - \lambda_n^0|$ . При этом, поскольку функция  $\Delta^0(\lambda)$  периодична, число  $c_1$  можно выбрать не зависящим от  $n$ . Очевидно, что функция  $s_n(r)$  непрерывна и монотонно возрастает по  $r \in [0, \varepsilon]$ . Выберем число  $N = N(Q, U)$  таким, что при всех  $|n| \geq N$  круги  $|\lambda - \lambda_n^0| \leq \varepsilon$  лежали в области  $P_{\alpha,\beta}$ , а числа  $s_n(\varepsilon)$  не превосходили  $c_1 \varepsilon / M$  (они стремятся к нулю, согласно Лемме 4.2). Тогда для каждого такого  $n$  найдется число  $r = r_n$ , являющееся корнем уравнения  $s_n(r) = c_1 r / M$ . При некоторых  $n$  это уравнение может иметь несколько решений — мы выберем наименьшее из них (оно, возможно, равно нулю). Таким образом

$$\max_{|\lambda - \lambda_n^0| \leq r_n} \left( \Upsilon(\pi, \lambda) + \Upsilon_{p'}(\lambda) \right) = s_n(r_n) = \frac{c_1 r_n}{M}.$$

Числа  $s_n(r_n)$  мы будем обозначать просто  $s_n$ .

Если же краевые условия регулярны, но не усиленно регулярны, то все нули  $\lambda_n^0$  двукратны и в круге  $|\lambda - \lambda_n^0| < \varepsilon$  выполнена оценка  $|\Delta^0(\lambda)| > c_2 |\lambda - \lambda_n^0|^2$ , где  $c_2$  вновь не зависит от  $n$ . В этом случае мы также рассмотрим функции  $s_n(r)$ , но число  $r_n$  определим как наименьший корень уравнения  $s_n(r) = c_2 r^2 / M$ , заведомо существующий на отрезке  $0 \leq r \leq \varepsilon$ , если  $s_n(\varepsilon) \leq c_2 \varepsilon^2 / M$ , что справедливо при достаточно больших  $n$ .

**Теорема 4.3.** Пусть  $Q \in L_1$  и  $L_{Q,U}$  — регулярный оператор Дирака. Обозначим через  $\{\lambda_n^0\}$  собственные значения (48) ассоциированного оператора  $L_{0,U'}$  и через  $\lambda_n$  собственные значения оператора  $L_{Q,U}$  с учетом алгебраической кратности. Тогда при подходящей нумерации последовательности  $\{\lambda_n\}$  (и такая нумерация возможна) в случае сильной регулярности оператора  $L_{Q,U}$  справедлива асимптотика

$$(55) \quad |\lambda_n - \lambda_n^0| \leq r_n \leq \frac{M(R, \alpha)}{c_1(U)} s_n(\varepsilon),$$

а в случае обычной регулярности

$$(56) \quad |\lambda_n - \lambda_n^0|^2 \leq r_n \leq \sqrt{\frac{M(R, \alpha)}{c_2(U)} s_n(\varepsilon)},$$

где неравенства справедливы, начиная с некоторого номера  $N$ , зависящего от потенциала  $Q$  и краевых условий  $U$ .

*Доказательство.* Сначала рассмотрим случай, когда корни  $\Delta^0(\lambda)$  простые. На окружностях  $\gamma_n$  радиуса  $r_n$  с центрами в нулях  $\lambda_n^0$  имеем оценки

$$|\Delta^0(\lambda)| > c_1 r_n, \quad |\delta(\lambda)| < M \left( \Upsilon(\pi, \lambda) + \Upsilon_{p'}(\lambda) \right) \leq c_1 r_n.$$

Тогда на окружностях  $\gamma_n$  будем иметь оценку  $|\Delta^0(\lambda)| > |\delta(\lambda)|$ . Согласно теореме Руше, внутри окружности  $\gamma_n$  находится ровно один нуль  $\lambda_n$  функции  $\Delta(\lambda)$ , т.е. при больших  $|n|$  выполняются оценки  $|\lambda_n - \lambda_n^0| < r_n$ . В случае двукратных корней на окружностях  $\gamma_n$  справедливы оценки

$$|\Delta^0(\lambda)| > c_2 r_n^2, \quad |\delta(\lambda)| < M \left( \Upsilon(\pi, \lambda) + \Upsilon_{p'}(\lambda) \right) \leq c_2 r_n^2,$$

и из теоремы Руше следует, что внутри каждой окружности  $\gamma_n$  лежат ровно два нуля функции  $\Delta(\lambda)$ .

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что число корней функций  $\Delta^0(\lambda)$  и  $\Delta(\lambda)$  в круге достаточно большого радиуса совпадает. Мы уже знаем, что при

достаточно большом  $\alpha_0$  вне полосы  $|\operatorname{Im}\lambda| < \alpha_0$  обе функции корней не имеют. Это свойство сохраняется для семейства операторов  $L(t) = L_{tQ,U}$ , порожденных потенциалами  $tQ$ , где  $0 \leq t \leq 1$ . Действительно, согласно Теореме 4.1, ширина полосы — число  $\alpha_0$ , определяется неравенством

$$\alpha_0^{1/2} > \frac{C\|V\|_\infty}{\|Q_\varepsilon\|_1}, \quad \text{где } Q = Q_\varepsilon + V, \quad \|Q_\varepsilon\|_1 < \varepsilon.$$

Пусть функции  $Q_\varepsilon$  и  $V$  уже построены для потенциала  $Q$ . Представим потенциал  $tQ$  в виде  $tQ = tQ_\varepsilon + tV$  — тогда  $\|tQ_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$ , а число  $\alpha_0$  не зависит от  $t$ . Функция  $\Upsilon(\lambda)$ , определенная (6) также зависит от потенциала  $Q$ , но  $\Upsilon(tQ, \lambda) = t\Upsilon(Q, \lambda)$ . Пусть  $\Gamma$  — прямоугольник, горизонтальные стороны которого лежат на прямых  $|\operatorname{Im}\lambda| = \pm\alpha_0$ , а вертикальные стороны выбраны столь далекими, что на них выполняется оценка  $|\delta(\lambda)| < M\Upsilon(\lambda) < |\Delta^0(\lambda)|$ . Тогда при  $t \in [0, 1]$  характеристический определитель  $\Delta_t(\lambda)$ , отвечающий потенциалу  $tQ$ , не имеет нулей на сторонах  $\Gamma$ , поскольку  $|\delta_t(\lambda)| < Mt\Upsilon(\lambda) < |\Delta^0(\lambda)|$ . Следовательно, нули  $\lambda_n(t)$  целой функции  $\Delta_t(\lambda)$ , являясь непрерывными функциями от  $t \in [0, 1]$ , не пересекают границы  $\Gamma$ , а потому их число при  $t = 0$  и  $t = 1$  одинаково (в следующей теореме мы строго обоснуем непрерывность собственных значений от параметра  $t$ ). Следовательно, «близкие» собственные значения  $\lambda_n$  можно занумеровать так, чтобы формулы (55) и (56) имели смысл без «сбоя» в нумерации. Теорема доказана.  $\square$

Конечно, важна информация о том, как убывают числа  $r_n$ , характеризующие скорость приближения собственных значений  $\lambda_n$  к собственным значениям ассоциированного оператора с нулевым потенциалом. В случае  $Q \in L_1$  мы, согласно Лемме 4.2, можем утверждать, что  $r_n \rightarrow 0$ . Однако уже в случае  $Q \in L_p$ ,  $p \in (1, 2]$ , мы можем получить более точную информацию. Для этого нам потребуется вспомогательный результат, который является следствием теоремы Кадеца (см. [41], а также [42] для более полной информации).

**Лемма 4.4.** Пусть  $|\lambda_n - 2n| < \varepsilon < 1/(2p)$  при всех  $n \in \mathbb{Z}$  и некотором  $p \in [1, 2]$ . Тогда для всех  $f \in L_p[0, \pi]$  справедлива оценка

$$\left( \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \int_0^\pi f(x) e^{i\lambda_n x} dx \right|^{p'} \right)^{1/p'} \leq C \|f\|_{L_p},$$

где постоянная  $C$  зависит от  $\varepsilon$ , но не зависит от последовательности  $\{\lambda_n\}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим линейный оператор  $T : L_p \rightarrow l_{p'}$ ,

$$Tf = \left\{ \int_0^\pi f(x) e^{i\lambda_n x} dx \right\}_{n \in \mathbb{Z}}.$$

Заметим, что при  $p = 2$  и  $p = \infty$  этот оператор ограничен, причем его норма ограничена константами  $M_2$  и  $M_\infty$ , не зависящими от последовательности  $\{\lambda_n\}$  (здесь мы используем теорему Кадеца). Применив интерполяционную теорему Рисса–Торина (см., например, [43]), получим утверждение леммы.  $\square$

Теперь получим оценку для чисел  $\{r_n\}$ . Отметим, что  $r_n = Ms_n/c_1 \leq Ms_n(\varepsilon)/c_1$  (для усиленно регулярного оператора) и  $r_n = \sqrt{Ms_n/c_2} \leq \sqrt{Ms_n(\varepsilon)/c_2}$  (для регулярного, но не усиленно регулярного оператора). Таким образом, оценки, полученные для чисел  $s_n(\varepsilon)$ , влекут оценки для  $r_n$ .

**Теорема 4.5.** Для любого  $Q \in L_1$  числа  $s_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Если же потенциал  $Q$  лежит в  $L_p$  при  $p \in (1, 2]$ , то  $\{s_n\} \in l_{p'}$ , где  $1/p + 1/p' = 1$ .

*Доказательство.* Для  $p = 1$  теорема уже доказана (см. Лемму 4.2). Пусть теперь  $p \in (1, 2]$ . Обозначим через  $\mu_n$  — точки, для которых

$$\Upsilon(\pi, \mu_n) + \Upsilon_{p'}(\mu_n) = \max_{|\lambda - \lambda_n^0| \leq \varepsilon} (\Upsilon(\pi, \lambda) + \Upsilon_{p'}(\lambda))$$

Тогда  $\mu_n = n + \kappa_j + o(1)$ . Заметим, если в Лемме 4.4 числа  $2n$  заменить на  $2n + \kappa$ , то оценка сохранится, возможно с новой константой  $C$ , зависящей только от  $\varepsilon$  и  $\kappa$ . Поскольку все слагаемые, входящие в определение функции  $\Upsilon(x, \lambda)$ , оцениваются одинаково, проведем рассуждение для функции

$$v_0(x, \lambda) = \int_0^x q(t) e^{2i\lambda t} dt,$$

где  $q \in L_p[0, \pi]$ . В силу теоремы Кадеца, примененной к функции  $q(t)\chi_{[0, x]}(t)$ , при достаточно большом  $N$  получим

$$\sum_{|n| > N} |v_0(x, \mu_n)|^{p'} \leq (C\|Q\|_{L_p})^{p'}.$$

Тогда, в силу теоремы Леви о предельном переходе,

$$\sum_{|n| > N} \int_0^\pi |v_0(x, \mu_n)|^{p'} dx \leq \pi (C\|Q\|_{L_p})^{p'}.$$

Применяя еще раз теорему Кадеца к последовательности  $\{v_0(\pi, \mu_n)\}_{|n| > N}$ , получим, что

$$\|\{s_n(\varepsilon)\}_{|n| > N}\|_{l_{p'}} \leq (1 + \pi^{1/p'}) C\|Q\|_{L_p}.$$

Эта оценка влечет утверждение теоремы для  $p \in (1, 2]$ .  $\square$

**4.3.** Теперь мы докажем результат о непрерывной зависимости резольвенты  $(L_{Q,U} - \lambda I)^{-1}$  от потенциала  $Q \in L_1$  в предположении регулярности оператора  $L_{Q,U}$ . Пусть  $Q_\varepsilon$  — семейство суммируемых функций, удовлетворяющих условию  $\|Q_\varepsilon(x) - Q(x)\|_{L_1} \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Далее полагаем, что  $Q$  и  $U$  фиксированными и полагаем  $L = L_{Q,U}$ ,  $L_\varepsilon = L_{Q_\varepsilon,U}$ . Докажем следующий результат.

**Теорема 4.6.** Пусть  $K$  компакт в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ , принадлежащий резольвентному множеству регулярного оператора  $L = L_{Q,U}$ . Пусть  $\|Q_\varepsilon(x) - Q(x)\|_{L_1} \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$  и  $L_\varepsilon = L_{Q_\varepsilon,U}$ . Тогда найдется  $\varepsilon_0 > 0$ , такое, что при всех  $\varepsilon < \varepsilon_0$  компакт  $K$  лежит в резольвентных множествах операторов  $L_\varepsilon$  и равномерно по  $\lambda \in K$  семейство операторов  $(L_\varepsilon - \lambda)^{-1}$  сходится при  $\varepsilon \rightarrow 0$  в равномерной операторной топологии, т.е.

$$\sup_{\lambda \in K} \|(L_\varepsilon - \lambda)^{-1} - (L - \lambda)^{-1}\| \rightarrow 0$$

*Доказательство.* Достаточно доказать теорему для фиксированной точки  $\lambda$ , лежащей в резольвентном множестве  $L$ . В силу непрерывности резольвенты от  $\lambda$  сходимость сохранится в некоторой малой открытой окрестности точки  $\lambda$ , а затем доказательство можно завершить с помощью стандартной техники выбора конечного подпокрытия компакта  $K$ .

В доказательстве будем существенно использовать Теорему 1.4. Обозначим через  $\mathbf{c}_\varepsilon(x)$ ,  $\mathbf{s}_\varepsilon(x)$  пару решений системы

$$(57) \quad B\mathbf{y}' + Q_\varepsilon(x)\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y},$$

удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{c}_{1,\varepsilon}(0) = 1, \quad \mathbf{c}_{2,\varepsilon}(0) = 0; \quad \mathbf{s}_{1,\varepsilon}(0) = 0, \quad \mathbf{s}_{2,\varepsilon}(0) = 1.$$

Согласно Теореме 1.4, имеем

$$(58) \quad \|\mathbf{c}_{j,\varepsilon}(x) - \mathbf{c}_j(x)\|_{W_1^1} + \|\mathbf{s}_{j,\varepsilon}(x) - \mathbf{s}_j(x)\|_{W_1^1} \leq C\|Q_\varepsilon(x) - Q(x)\|_{L_1}, \quad j = 1, 2.$$

Применим метод вариации постоянных к уравнению  $l_\varepsilon(\mathbf{y}) = \lambda \mathbf{y} + \mathbf{f}$ . Тогда решение примет вид

$$\mathbf{y}_\varepsilon = \gamma_{1,\varepsilon} \mathbf{c}_\varepsilon(x, \lambda) + \gamma_{2,\varepsilon} \mathbf{s}_\varepsilon(x, \lambda) - \int_x^\pi \mathbf{U}_\varepsilon(x - t, \lambda) \mathbf{f}(t) dt,$$

где

$$\mathbf{U}_\varepsilon(x, \lambda) = \begin{pmatrix} c_{1,\varepsilon}(x, \lambda) & s_{1,\varepsilon}(x, \lambda) \\ c_{2,\varepsilon}(x, \lambda) & s_{2,\varepsilon}(x, \lambda) \end{pmatrix}$$

Повторяя рассуждения Теоремы 3.4, получим

$$\begin{pmatrix} \gamma_{1,\varepsilon} \\ \gamma_{2,\varepsilon} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta_\varepsilon(\lambda)} \begin{pmatrix} u_{21} + u_{23}s_{2,\varepsilon}(\pi, \lambda) - u_{24}c_{2,\varepsilon}(\pi, \lambda) & -u_{11} - u_{13}c_{1,\varepsilon}(\pi, \lambda) + u_{14}s_{1,\varepsilon}(\pi, \lambda) \\ -u_{22} + u_{23}c_{2,\varepsilon}(\pi, \lambda) - u_{24}s_{2,\varepsilon}(\pi, \lambda) & u_{12} + u_{13}s_{1,\varepsilon}(\pi, \lambda) + u_{14}c_{1,\varepsilon}(\pi, \lambda) \end{pmatrix} \times \\ \times \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} \int_0^\pi \mathbf{U}_\varepsilon(-t, \lambda) \mathbf{f}(t) dt.$$

Поскольку краевые условия регулярны, то  $\Delta = \Delta_\varepsilon(\lambda) \neq 0$  при всех  $\varepsilon \geq 0$ . Из оценки (58) имеем

$$\|U(\mathbf{c}_\varepsilon) - U(\mathbf{c}_\delta)\| + \|U(\mathbf{s}_\varepsilon) - U(\mathbf{s}_\delta)\| \leq C\|Q_\varepsilon - Q_\delta\|_{L_1},$$

а потому  $|\Delta_\varepsilon - \Delta_\delta| \leq C\|Q_\varepsilon - Q_\delta\|_{L_1}$ . Выберем теперь число  $\lambda$  таким, чтобы  $\Delta_0(\lambda) \neq 0$ . Тогда  $|\Delta_\varepsilon(\lambda)| > c = c(\lambda)$  при всех достаточно малых  $\varepsilon > 0$ . Следовательно, постоянные  $\gamma_{1,\varepsilon}, \gamma_{2,\varepsilon}$  таковы, что

$$|\gamma_{1,\varepsilon} - \gamma_{1,\delta}| + |\gamma_{2,\varepsilon} - \gamma_{2,\delta}| \leq C\|Q_\varepsilon - Q_\delta\|_{L_1}\|f\|_{L_2},$$

где  $C$  зависит только от выбранного числа  $\lambda$ . Полученные оценки показывают, что для решений

$$\mathbf{y}_\varepsilon = (L_\varepsilon - \lambda)^{-1} \mathbf{f}$$

справедливы неравенства

$$\|\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{y}_0\|_{L_2} \leq C\|\mathbf{y}_\varepsilon - \mathbf{y}_0\|_{W_1^1} \leq C\|Q_\varepsilon - Q_0\|_{L_1}\|f\|_{L_2}.$$

Тем самым доказано соотношение (57), или равномерная резольвентная сходимость операторов  $L_\varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .  $\square$

**Следствие 4.7.** Из Теоремы 4.6 следует, что собственные значения оператора  $L_{Q,U}$  непрерывно зависят от потенциала  $Q$ , в норме пространства  $L_1$ . Доказательство сразу получается с помощью стандартной техники с использованием проекторов Рисса.

**4.4.** Теперь докажем теорему об асимптотике собственных функций сильно регулярного оператора. Для случая обычной регулярности нужно рассматривать задачу об асимптотическом поведении двумерных подпространств, отвечающих сближающимся собственным значениям, но ее мы в этой работе не рассматриваем.

**Теорема 4.8.** <sup>5)</sup> Пусть  $Q \in L_p$  при некотором  $p \geq 1$  и пусть оператор  $L_{Q,U}$  сильно регулярен. Обозначим через  $\{\mathbf{y}_n(x)\}$  собственные функции этого оператора, отвечающие собственным значениям  $\{\lambda_n\}$ , а через  $\{\mathbf{y}_n^0(x)\}$  собственные функции (с нормой  $=1$ ) ассоциированного оператора  $L_{0,U'}$ , отвечающие собственным значениям  $\{\lambda_n^0\}$ . Тогда справедливы равенства

$$(59) \quad \mathbf{y}_n(x) = E(x)\mathbf{y}_n^0(x) + \mathbf{R}_n(x),$$

<sup>5)</sup>В оригинальной статье Math. Notes **96** (5) в формулировке Теоремы 4.8 имеется опечатка: вместо  $L_{p'}$ -нормы в определении чисел  $b_n$  записана  $C$ -норма, т.е. норма в пространстве непрерывных функций. Конечно, предшествующие результаты (см. доказательство Теоремы 4.5) говорят о том, что правильная оценка дается  $L_{p'}$ -нормой.

где числа  $b_n = \|\mathbf{R}_n\|_{L_{p'}}$  таковы, что последовательность  $\{b_n\} \in l_{p'}$ ,  $1/p + 1/p' = 1$ , а при  $p = 1$  последовательность  $b_n = \|\mathbf{R}_n\|_C$  стремится у нулю. Более того, справедливо представление

$$\mathbf{R}_n(x) = \mathcal{R}_n(x) \begin{pmatrix} \cos(\lambda_n^0 x) & \sin(\lambda_n^0 x) \end{pmatrix},$$

где матрица  $\mathcal{R}_n$  такова, что производные ее элементов  $r_{jk,n}(x)$  подчинены оценке

$$|r'_{jk,n}(x)| \leq C(|q_1(x)| + |q_2(x) + q_3(x)|)$$

с постоянной  $C$ , не зависящей от  $n$ . Собственные функции сопряженного оператора, отвечающие собственным значениям  $\{\bar{\lambda}_n\}$  допускают представление

$$(60) \quad \mathbf{z}_n(x) = E^{-1}(x)\mathbf{z}_n^0(x) + \mathbf{R}_n^*(x),$$

где  $\mathbf{z}_n^0(x)$  — собственные функции оператора, сопряженного к  $L_{0,U'}$ , нормированные (при больших  $n$ ) условием  $\langle \mathbf{y}_n^0, \mathbf{z}_n^0 \rangle = 1$ . При этом функции  $\mathbf{R}_n^*(x)$  удовлетворяют тем же условиям, что и  $\mathbf{R}_n(x)$ .

*Доказательство.* Доказательство легко получается из Теорем 2.5 и 2.6. Поясним, как это сделать.

Пусть  $\lambda_n^0$  — одно из собственных значений оператора  $L_0$ , в окрестности которого находится собственно значение  $\lambda_n$  оператора  $L$ . Тогда  $\Delta_0(\lambda_n^0) = \Delta(\lambda_n) = 0$ . Обозначим через  $\mathbf{w}^0$  вектор с двумя компонентами  $w_1^0$  и  $w_2^0$ , такими, что функция  $w_1^0 \mathbf{c}^0(x, \lambda_n^0) + w_2^0 \mathbf{s}^0(x, \lambda_n^0)$  является собственной для оператора  $L_{0,U'}$ . Так как  $\lambda_n^0$  — простой ноль функции  $\Delta_0(\lambda)$ , то вектор  $w^0$  определен с точностью до константы. Выберем ее так, чтобы  $\|\mathbf{w}^0\| = 1$ . Аналогично определим вектор  $\mathbf{w}$ , чтобы функция  $w_1 \mathbf{c}(x, \lambda_n) + w_2 \mathbf{s}(x, \lambda_n)$  была собственной для оператора  $L_{Q,U}$ . Из определения следуют равенства

$$M_0(\lambda_n^0)\mathbf{w}^0 = M(\lambda_n)\mathbf{w} = 0,$$

где

$$M_0(\lambda) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix} + E \begin{pmatrix} u_{13} & u_{14} \\ u_{23} & u_{24} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1^0(\pi, \lambda) & s_1^0(\pi, \lambda) \\ c_2^0(\pi, \lambda) & s_2^0(\pi, \lambda) \end{pmatrix},$$

а матриц-функция  $M(\lambda)$  определена аналогично (см. Лемму 4.2). Далее будем использовать обозначение

$$V_0(\lambda) = \begin{pmatrix} c_1^0(\pi, \lambda) & s_1^0(\pi, \lambda) \\ c_2^0(\pi, \lambda) & s_2^0(\pi, \lambda) \end{pmatrix}, \quad V(\lambda) = \begin{pmatrix} c_1(\pi, \lambda) & s_1(\pi, \lambda) \\ c_2(\pi, \lambda) & s_2(\pi, \lambda) \end{pmatrix},$$

Из асимптотических равенств следует  $\{\|V(\lambda_n) - V_0(\lambda_n^0)\|\} \in l_{p'}$  (см. доказательство Теоремы 4.5). Поскольку функция  $M_0(\lambda)$  периодична, а  $\lambda_n^0$  — простой ноль этой функции, то

$$\|w^0 - w\| \leq C_1 \|M_0(\lambda_n^0) - M(\lambda_n)\| \leq C_2 E \|V(\lambda_n) - V_0(\lambda_n^0)\|,$$

где  $C_1$  и  $C_2$  зависят только от краевых условий. Тогда

$$\mathbf{y}_n(x) = w_1^0 \mathbf{c}(x, \lambda_n) + w_2^0 \mathbf{s}(x, \lambda_n) + (w_1 - w_1^0) \mathbf{c}(x, \lambda_n) + (w_2 - w_2^0) \mathbf{s}(x, \lambda_n),$$

а используя асимптотические формулы (31) и (2.6), приходим к равенству

$$\mathbf{y}_n(x) = E(x)(w_1^0 \mathbf{c}^0(x, \lambda_n) + w_2^0 \mathbf{s}^0(x, \lambda_n)) + \mathbf{R}_n^1(x),$$

где  $\mathbf{R}^1(x)$  удовлетворяет сформулированным в Теореме условиям. Далее, пользуясь тригонометрическими формулами и асимптотикой  $\{\lambda_n\}$  получаем, что функции

$$\mathbf{R}^2(x) = \mathbf{c}^0(x, \lambda_n) - \mathbf{c}^0(x, \lambda_n^0), \quad \mathbf{R}^3(x) = \mathbf{s}^0(x, \lambda_n) - \mathbf{s}^0(x, \lambda_n^0)$$

удовлетворяют тем же условиям. При этом, если  $b_n^j = \|\mathbf{R}_n^j(x)\|_{L_{p'}}$ , то последовательности  $\{b_n^j\}$  принадлежат  $l_{p'}$ . Оценки для производных  $r'_{jk,n}$  сразу же следуют из оценок для производных  $\rho'_{j,k}$ , полученных в теоремах 2.5 и 2.6.

Так как сопряженный оператор  $L_{Q,U}^*$  тоже сильно регулярен, то утверждение теоремы для него сохраняется, но нужно учесть, что функция  $E(x)$  для сопряженного потенциала  $\overline{Q}$  преобразуется в функцию  $E^{-1}(x)$ . Теорема доказана.  $\square$

**4.5.** В заключение докажем теорему о базисности Рисса собственных и присоединенных функций сильно регулярного оператора  $L_{Q,U}$  при условии  $Q \in L_1$ . Затем, используя один прием из [16] (примененный в другой ситуации) и теорему Кацнельсона–Маркуса–Мацаева, мы покажем, что справедливым остается утверждение о базисности Рисса из двумерных подпространств, отвечающих сближающимся собственным значениям. Определение базиса Рисса из подпространств (или безусловной базисности из подпространств) см. в монографии [39, гл. 6].

**Теорема 4.9.** Пусть  $Q \in L_1$  и пусть оператор  $L_{Q,U}$  сильно регулярен. Тогда система его собственных и присоединенных функций (при условии, что его собственные функции нормированы на 1) образуют базис Рисса. Если оператор  $L_{Q,U}$  регулярен, но не сильно регулярен, то двумерные подпространства, отвечающие сближающимся собственным значениям образуют безусловный базис пространства  $\mathbb{H}$ .

*Доказательство.* Сначала заметим, что собственные и присоединенные функции  $\{\mathbf{y}_n(x)\}$  и  $\{\mathbf{z}_n(x)\}$  оператора  $L_{Q,U}$  и его сопряженного  $L_{Q,U}^*$  образуют полные системы в пространстве  $\mathbb{H}$ . Это следует из оценки резольвенты этих операторов, вне некоторой полосы  $|\operatorname{Im} \lambda| > \alpha$ , полученной в Теореме 4.1 и того факта, что резольвенты этих операторов являются интегральными операторами, функции Грина которых равномерно ограничены вне кружков малого радиуса  $\varepsilon$  с центрами в собственных значениях  $\lambda_n$ . Ограниченность функций Грина в полосе (там, где имеются асимптотики фундаментальной системы решений) получается точно также, как это сделано в §3 для функции  $G_0(x, \xi, \lambda)$  (подстановка функций  $\mathbf{c}(x, \lambda)$  и  $\mathbf{s}(x, \lambda)$  вместо  $\mathbf{c}^0(x, \lambda)$  и  $\mathbf{s}^0(x, \lambda)$  при построении функции Грина ничего не меняет в доказательстве при наличии соответствующих асимптотик). Поэтому полнота систем  $\{\mathbf{y}_n(x)\}$  и  $\{\mathbf{z}_n(x)\}$  получается точно также, как при  $Q = 0$ .

Теперь предположим, что оператор  $L_{Q,U}$  сильно регулярен. Докажем, что обе системы  $\{\mathbf{y}_n(x)\}$  и  $\{\mathbf{z}_n(x)\}$  бесселевы. Воспользуемся Теоремой 4.8, которая дает представления для функций этих систем. В этих представлениях мы считаем, что  $\|\mathbf{y}_n^0(x)\| = 1$  и  $\langle \mathbf{y}_n^0, \mathbf{z}_n^0 \rangle = 1$ . Уже доказано, что системы  $\{\mathbf{y}_n^0(x)\}$  и  $\{\mathbf{z}_n^0(x)\}$ , подчиненные указанной нормировке, являются бесселевыми. Но тогда системы, составленные из первых слагаемых  $\{E(x)\mathbf{y}_n^0(x)\}$  и  $\{E^{-1}(x)\mathbf{z}_n^0(x)\}$  в представлениях (59) и (60), также являются бесселевыми (умножение всех функций системы на ограниченную функцию оставляет систему бесселевой). Остается показать, что системы, составленные из вторых слагаемых  $\{\mathbf{R}_n(x)\}$  и  $\{\mathbf{R}_n^*(x)\}$  являются бесселевыми. Докажем это свойство для первой системы, свойства второй системы те же самые.

Из представлений для функций  $\mathbf{R}_n(x)$  следует, что достаточно доказать сходимость ряда

$$(61) \quad \sum_n \left| \int_0^\pi f(x) r_n(x) \sigma(\lambda_n^0 x) dx \right|^2,$$

где  $f \in L_2[0, \pi]$ ,  $\sigma(\lambda_n^0) = \cos(\lambda_n^0 x)$  или  $\sin(\lambda_n^0 x)$ , а функция  $r_n(x) \in W_1^1[0, \pi]$  — одна из компонент матрицы  $\mathcal{R}_n(x)$ , подчинена условию

$$|r'_n(x)| \leq C \left( |q_1(x)| + \frac{1}{2}|q_2(x)| + \frac{1}{2}|q_3(x)| \right),$$

где постоянная  $C$  не зависит от  $n$ . Это замечание следует из того, что ряд  $\sum |\langle \mathbf{f}(x), \mathbf{R}_n(x) \rangle|^2$  представляется в виде четырех рядов вида (61).

Обозначим сумму  $|q_1(x)| + \frac{1}{2}|q_2(x)| + \frac{1}{2}|q_3(x)|$  через  $q(x)$ . Далее будем использовать оценку  $|r'_n(x)| \leq Cq(x)$ . Сумму (61) перепишем в виде

$$\begin{aligned} & \sum_n \left| \int_0^\pi f(x) \left[ r_n(0) + \int_0^x r'_n(t) dt \right] \sigma(\lambda_n^0 x) dx \right|^2 \leq \\ & \leq 2 \sum_n \left| r_n(0) \int_0^\pi f(x) \sigma(\lambda_n^0 x) dx \right|^2 + 2 \sum_n \left| \int_0^\pi r'_n(t) \int_t^\pi f(x) \sigma(\lambda_n^0 x) dx dt \right|^2. \end{aligned}$$

Здесь первый ряд в правой части сходится, поскольку система  $\{\sigma(\lambda_n^0 x)\}$  бesselева, а числа  $r_n(0)$  ограничены (даже стремятся к нулю). Продолжим оценку второго ряда. Перепишем его в виде

$$\begin{aligned} & \sum_n \left| \int_0^\pi \int_0^\pi r'_n(t) r'_n(s) \int_t^\pi f(x) \sigma(\lambda_n^0 x) dx \int_s^\pi f(y) \sigma(\lambda_n^0 y) dy ds dt \right| \leq \\ & \leq C^2 \int_0^\pi \int_0^\pi q(s) q(t) \sum_n \left| \int_t^\pi f(x) \sigma(\lambda_n^0 x) dx \int_s^\pi f(y) \sigma(\lambda_n^0 y) dy \right| ds dt \leq C^2 C_1 \left( \int_0^\pi q(x) dx \right)^2 \|f\|^2, \end{aligned}$$

поскольку система  $\{\sigma(\lambda_n^0 x)\}$  бesselева и сумма под интегралами равномерно по  $s, t \in [0, \pi] \times [0, \pi]$  оценивается величиной (через  $\chi_{[t, \pi]}$  обозначаем характеристическую функцию отрезка  $[t, \pi]$ )

$$\begin{aligned} & \sum_n \left| \int_0^\pi f(x) \chi_{[t, \pi]} \sigma(\lambda_n^0 x) dx \int_0^\pi f(y) \chi_{[s, \pi]} \sigma(\lambda_n^0 y) dy \right| \leq \\ & \leq \sum_n \left| \int_0^\pi f(x) \chi_{[t, \pi]} \sigma(\lambda_n^0 x) dx \right|^2 + \left| \int_0^\pi f(y) \chi_{[s, \pi]} \sigma(\lambda_n^0 y) dy \right|^2 \leq C_1 \|f\|^2. \end{aligned}$$

Тем самым доказана бesselевость обеих систем  $\{\mathbf{y}_n(x)\}$  и  $\{\mathbf{z}_n(x)\}$ . Из представлений (59) и (60) при больших  $n$  получаем

$$\alpha_n := \langle \mathbf{y}_n(x), \mathbf{z}_n(x) \rangle = \langle \mathbf{y}_n^0(x), \mathbf{z}_n^0(x) \rangle + o(1) = 1 + o(1).$$

Следовательно, система  $\{\alpha_n^{-1} \mathbf{z}_n(x)\}$  (конечно, она тоже бesselева) является биортогональной к  $\{\mathbf{y}_n(x)\}$ . Теперь воспользуемся теоремой Бари-Боаса [39, гл. 6]: *Если системы  $\{\varphi_n\}$  и  $\{\psi_n\}$  взаимно биортогональны, полны и бesselевы, то они обе являются базисами Рисса.*

Заметим, что соотношения биортогональности мы выписывали при больших  $n$ , когда собственных значения простые и присоединенных нет. Однако в сильно регулярном случае присоединенных функций может быть только конечное число, а потому никакого влияния на ход доказательства они не оказывают.

Теперь предположим, что оператор  $L = L_{Q,U}$  регулярен, но не сильно регулярен. Добавим к  $Q$  ограниченный потенциал  $Q_0$ , такой, чтобы  $L_{Q+Q_0,U}$  был сильно регулярен. Этого можно добиться подбирая внедиагональные функции так, чтобы  $E(\pi) \neq 1$ . Тогда собственные и присоединенные функции оператора  $L + Q_0$  образуют базис Рисса. Так как присоединенных функций конечное число, то найдется конечномерный оператор  $K$ , такой, что  $L + Q_0 + K$  имеет только собственные функции. Тогда в скалярном произведении, топологически эквивалентному исходному, он является нормальным оператором, а с учетом, что его собственные значения лежат в полосе, он представим в виде  $T + B$ ,



где  $T$  самосопряжен, а  $B$  ограничен. Следовательно,  $L = T + B - Q_0 - K$  является ограниченным возмущением самосопряженного оператора  $T$ , собственные значения которого имеют асимптотику  $\mu_n = n + O(1)$ . Но если собственные значения  $\mu_n$  самосопряженного оператора  $T$  удовлетворяют неравенствам  $|\mu_n| \geq c|n|$ , то согласно теореме Кацнельсона-Маркуса-Мацаева (см. [19, 20] *система собственных и присоединенных функций ограниченного возмущения оператора  $T$  образует базис Рисса со скобками (или базис Рисса из подпространств)*). Отметим, что в указанных работах не оговорено специально, как расставлять скобки или объединять векторы в подпространства, но из хода доказательства (см. [18]) легко извлечь, что в нашей ситуации объединять надо функции, отвечающие сближающимся собственным значениям. Теорема доказана.  $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Thaller, *The Dirac Equation* (Springer, Berlin, 1992).
- [2] B. M. Levitan and I. S. Sargsyan, *Sturm–Liouville and Dirac operators* (Nauka, Moscow, 1988) [English transl.: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht Boston London, 1991].
- [3] P. Djakov and B. Mityagin, “Bari–Markus property for Riesz projections of 1D periodic Dirac operators,” *Mat. Nachr.* **283** (3), 443–462 (2010).
- [4] P. Djakov and B. Mityagin, “Equiconvergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions,” *Journal of Approximation Theory* **164** (7), 879–927 (2012).
- [5] P. Djakov and B. Mityagin, “Unconditional convergence of spectral decompositions of 1D Dirac operators with regular boundary conditions,” *Indiana Univ. Math. J.* **61** (1), 359–398 (2012).
- [6] P. Djakov and B. Mityagin, “Riesz bases consisting of root functions of 1D Dirac operators,” *Proc. Amer. Math. Soc.* **141** (4), 1361–1375 (2013).
- [7] S. Albeverio, R. O. Hryniv, and Ya. Mykytyuk, “Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials,” *Russian J. Math. Phys.* **12** (4), 406–423 (2005).
- [8] G. D. Birkhoff, “On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter,” *Trans. Amer. Math. Soc.* **9** (2), 219–231 (1908).
- [9] G. D. Birkhoff, “Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations,” *Trans. Amer. Math. Soc.* **9** (4), 373–395 (1908).
- [10] Y. D. Tamarkin, *Some General Problems of the Theory of Ordinary Differential Equations and Series Expansion of Arbitrary Functions* (Tipografia Frolovoi, Petrograd, 1917) [in Russian].
- [11] Y. D. Tamarkin, “Some general problems of ordinary linear differential equations and expansion of arbitrary function in series of fundamental functions,” *Math. Zeits.* **27** (1), 1–54 (1928).
- [12] G. D. Birkhoff and R. E. Langer, “The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order,” *Proc. Amer. Acad.* **58**, 51–128 (1923).
- [13] N. Dunford, “A survey of the theory of spectral operators,” *Bull. Amer. Math. Soc.* **64** (5), 217–274 (1958).
- [14] V. P. Mikhailov, “Riesz bases in  $L_2(0,1)$ ,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **144** (5), 981–984 (1962).
- [15] G. M. Kesselman, “On the unconditional convergence of expansions with respect to the eigenfunctions of some differential operators,” *Izv. Vuzov SSSR Mat.* **39** (2), 82–93 (1964).
- [16] A. A. Shkalikov, “Some problems in the theory of polynomial operator pencils,” *Uspekhi Mat. Nauk* **38** (3), 189–190 (1983) [Russian Mathematical Surveys **38** (3), 151–152 (1983)].
- [17] A. A. Shkalikov, “Boundary problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions,” *Tr. semin. im. I.G. Petrovskogo* **9**, 190–229 (1983) [*J. Sov. Math.* **33** (6), 1311–1342 (1986)].
- [18] A. S. Markus, “Expansion in root vectors of a slightly perturbed self-adjoint operator,” *Dokl. Acad. Nauk SSSR* **142** (3), 538–541 (1962) [*Sov. Math., Dokl.* **3**, 104–108 (1962)].
- [19] V. E. Katsnel’son, “Conditions under which systems of eigenvectors of some classes of operators form a basis,” *Funk. Anal. Pril.* **1** (2), 39–51 (1967) [*Funct. Anal. and its Appl.* **1** (2), 39–51 (1967)].
- [20] A. S. Markus and V. I. Matsaev, “Comparison theorems for spectra of linear operators, and spectral asymptotics,” *Tr. Mosk. Mat. Obshch.* **45**, 133–181 (1982) [*Trans. Moscow Math. Soc.*, No. 1, 139–187 (1984)].
- [21] A. S. Markus, *Introduction to the Spectral Theory of Polynomial Operator Bundles* (Shtiintsa, Kishinev, 1986) [in Russian].
- [22] M. S. Agranovich, “On the convergence of series in the root vectors of almost self-adjoint operators,” *Tr. Mosk. Mat. Obshch.* **41**, 163–180 (1980) [*Trans. Moscow Math. Soc.*, No. 1, 167–182 (1982)].
- [23] M. S. Agranovich *Spectral properties of diffraction problems* supplement to N. N. Voitovich, B. Z. Katsenelenbaum, and A. N. Sivov, *Generalized method of eigenoscillations in diffraction theory*

- (Nauka, Moscow, 1977) [Engl. Transl.: A. S. Agranovich, B. Z. Katsenelenbaum, A. N. Sivov, and N. N. Voitovich *Generalized method of eigenoscillations in diffraction theory* (Wiley-VCH, Weinheim, 1999)].
- [24] J. Adduci and B. S. Mityagin, “Eigensystem of an  $L_2$ -perturbed harmonic oscillator is an unconditional basis,” *Central European Journal of Mathematics*, **10** (2), 569–589 (2012).
  - [25] A. A. Shkalikov, “On the basis property of root vectors of a perturbed self-adjoint operator,” *Trudy Mat. Inst. Steklov.* **269** (1), 290–303 (2010) [Proc. Steklov Inst. Math. **269** (1), 284–298 (2010)].
  - [26] M. M. Malamud and L. L. Oridoroga, “On the completeness of root subspaces of boundary value problems for first order systems of ordinary differential equations,” *J. Funct. Anal.* **263** (7), 1939–1980 (2012).
  - [27] A. A. Lunyov and M. M. Malamud, “On the completeness of the root vectors for first order systems,” *Dokl. Math.* **88** (3), 678–683 (2013).
  - [28] R. Kh. Amirov and I. M. Guseinov, “Some classes of Dirac operators with singular potentials,” *Diff. Uravn.* **40** (7), 999–1001 (2004) [Differential Equations **40** (7), 1066–1068 (2004)].
  - [29] A. G. Baskakov, A. V. Derbushev and A. O. Shcherbakov, “The method of similar operators in the spectral analysis of non-self-adjoint Dirac operators with non-smooth potentials,” *Izv. RAN Ser. Mat.* **75** (3), 3–28 (2011) [Izv. Math. **75** (3), 445–469 (2011)].
  - [30] V. V. Kornev and A. P. Khromov, “Dirac system with undifferentiable potential and antiperiodic boundary conditions,” *Izv. Sarat. Univ. Nov. Ser. Ser. Matematika Mekhanika Informatika* **13** (3), 28–35 (2013).
  - [31] I. Trooshin and M. Yamamoto, “Riesz basis of root vectors of a nonsymmetric system of first-order ordinary differential operators and application to inverse eigenvalue problems,” *Applicable Anal.* **80** (1–2), 19–51 (2001).
  - [32] A. M. Savchuk, “Spectral Properties of Dirac Operators on  $(0, 1)$  with summable potentials,” *The Sixth International Conference on Differential and Functional Differential Equations. Abstracts, Moscow*, 63 (2011).
  - [33] A. A. Lunev and M. M. Malamud, “On the Riesz Basis Property of the Root Vector System for Dirac-Type  $2 \times 2$  Systems,” *Dokl. Akad. Nauk* **458** (3), 1–6 (2014) [Doklady Mathematics **90** (2), 556–562 (2014)].
  - [34] A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov “Sturm–Liouville operators with singular potentials,” *Mat. Zametki* **66** (6), 897–912 (1999) [Math. Notes **66** (6), 741–753 (1999)].
  - [35] E. Coddington and N. Levinson *Theory of ordinary differential equations* (New York Toronto London, 1955).
  - [36] P. Hartman, *Ordinary Differential Equations* (Wiley Inc., New York, 1964).
  - [37] M. A. Naimark, *Linear differential operators* (Nauka, Moscow, 1969) [in Russian].
  - [38] M. G. Krein, “The theory of self-adjoint extensions of semi-bounded Hermitian transformations and its applications, I, II,” *Mat. Sb.* **20** (3), 431–490 (1947); **21** (3) 365–404 (1947).
  - [39] I. C. Gohberg and M. G. Krein, *Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators* (Nauka, Moscow, 1965) [in Russian].
  - [40] M. V. Keldysh, “On the completeness of the eigenfunctions of some classes of non-selfadjoint linear operators,” *Russian Math. Surv.* **26** (4), 15–47 (1971).
  - [41] M. I. Kadets, “Exact value of Paley–Wiener constant,” *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **155** (6), 1253–1254 (1964).
  - [42] R. O. Hryniv, “Uniformly bounded families of Riesz bases of exponentials, sines, and cosines,” *Mat. Zametki* **87** (4), 542–553 (2010) [Math. Notes **87** (4), 510–520 (2010)].
  - [43] J. Bergh and J. Löfström *Interpolation Spaces* (Springer–Verlag, Berlin, 1976).